Límites, derivadas e integrales

PLAN DIFERENCIADO

PROFESORA VANESSA CASTRO RAMÍREZ

Antes de comenzar

¿Qué interés tuviste al elegir la asignatura?

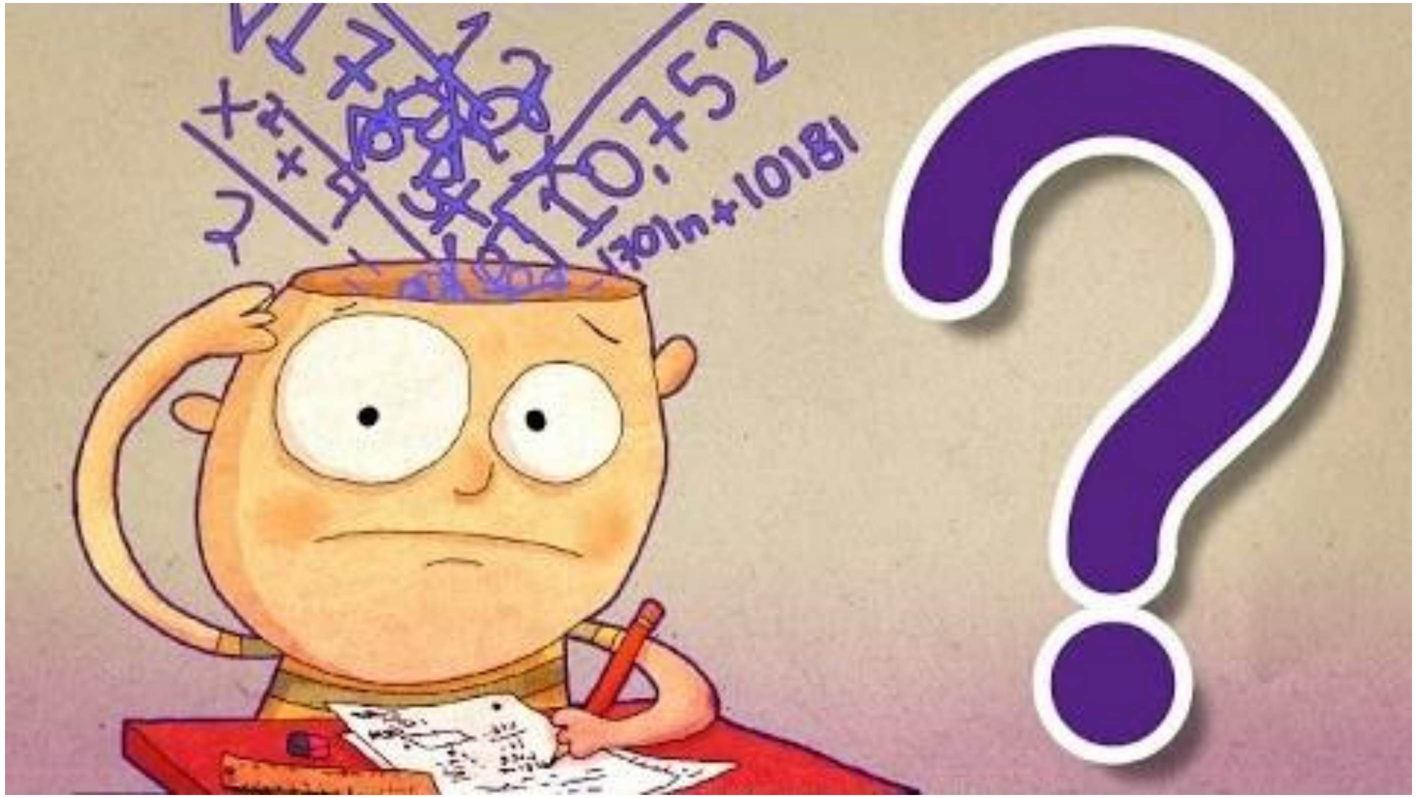
¿Qué expectativas tienes con respecto a la asignatura?

Escribe tus impresiones en una hoja de cuadernillo, la cual será archivada en tu carpeta.

Símbolos matemáticos que tienes que conocer

$\Rightarrow$	"implica"	$\in$	"pertenece a"
$\Leftrightarrow$	"equivale"	$\notin$	"no pertenece a"
$\forall$	"para todo"	$\subset$	"está incluido en"
$\exists$	"existe"	$\not\subset$	"no está incluido en"
$:$	"tal que"	$\{\ \}$	"limitación de los elementos de un conjunto"
$/$	"tal que"	$\cap$	"intersección"
		$\varnothing$	"conjunto vacio"

Veamos el siguiente video



Recordemos…

Los números naturales son los que utilizamos en la vida cotidiana para contar u ordenar.

Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural.

$\mathbb{N}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ se denominan **"Números Naturales".**

$\mathbb{N}_o$ Los **"Números Cardinales"** corresponden a la unión del conjunto de los números naturales con el cero. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

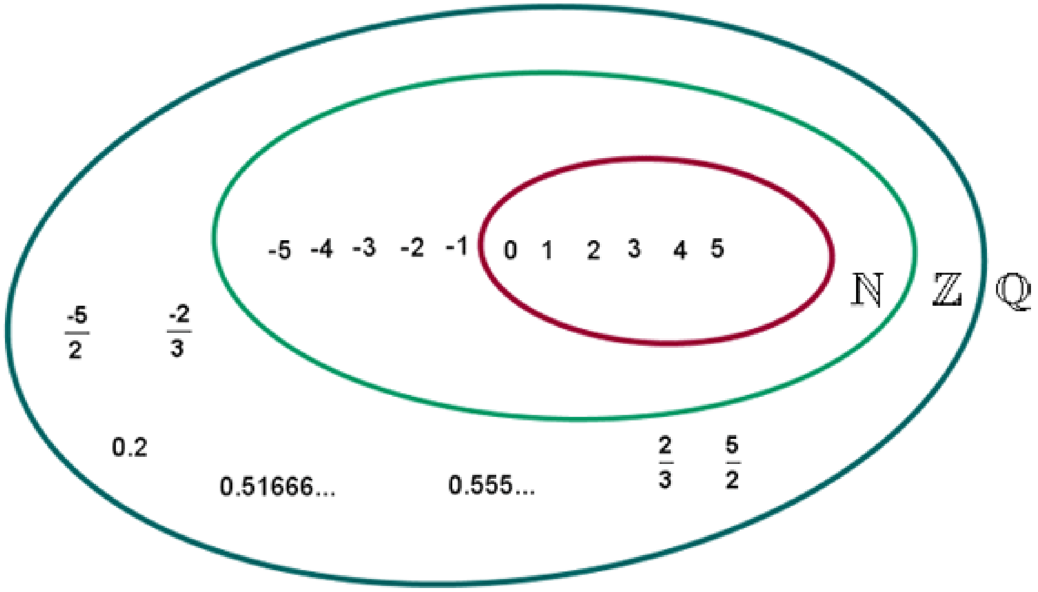
Con los números naturales no era posible realizar diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor. La necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar, etc. Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado números enteros.

$\mathbb{Z}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1, 0, 1, 2,\ldots\}$ se denominan **"Números Enteros"**.

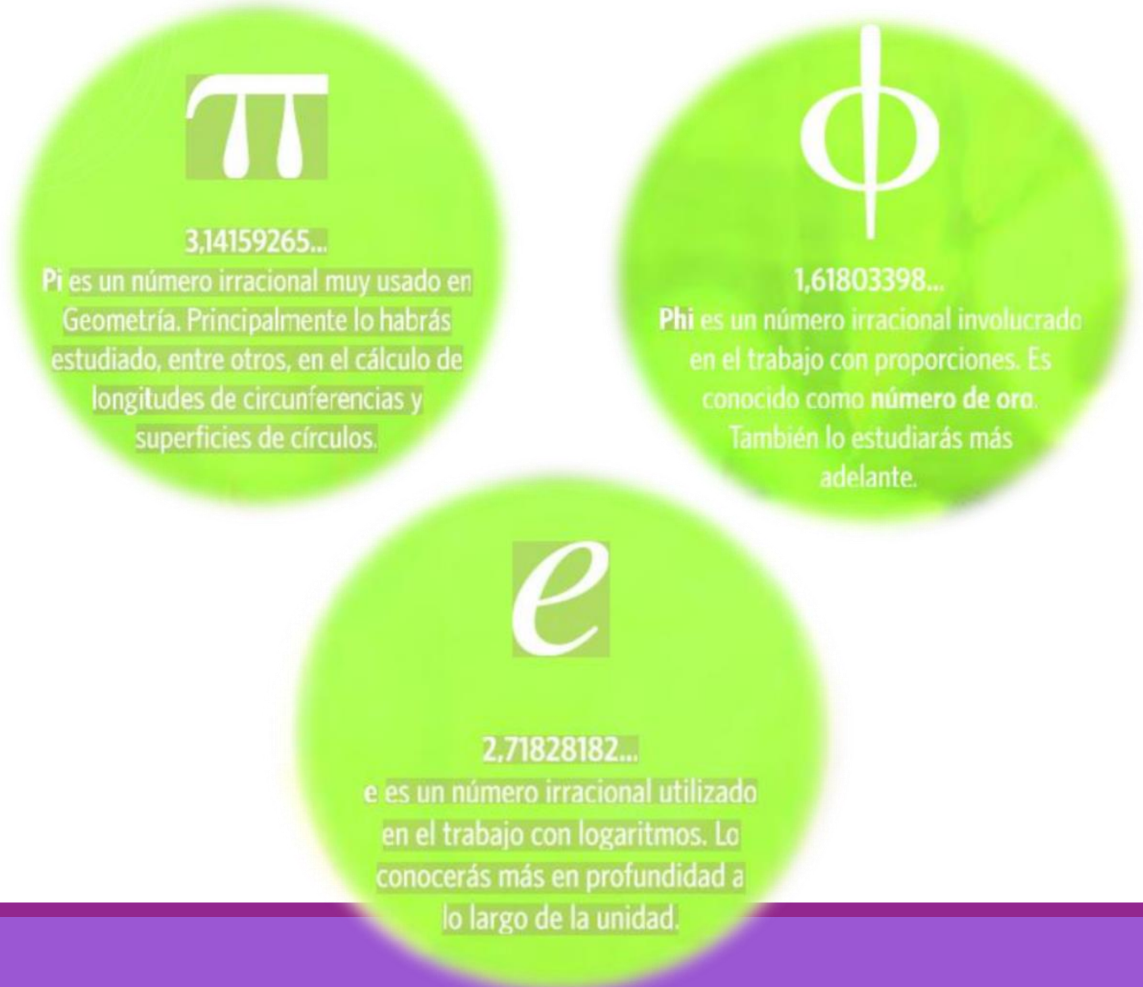
Los números racionales son todos aquellos números de la forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ con **a** y **b** números enteros y **b** distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa por la letra **Q**.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Se considera el conjunto de los números enteros un subconjunto de los números racionales. Así:



A lo largo de tu enseñanza has estudiado distintos conjuntos numéricos. Por ejemplo, el de los números naturales ($\mathbb{N}$), el de los números enteros ($\mathbb{Z}$) y el de los números racionales ($\mathbb{Q}$). En este nivel estudiarás el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), con los que completarás el estudio de los números reales ($\mathbb{R}$), que corresponden a la unión entre los números racionales e irracionales.



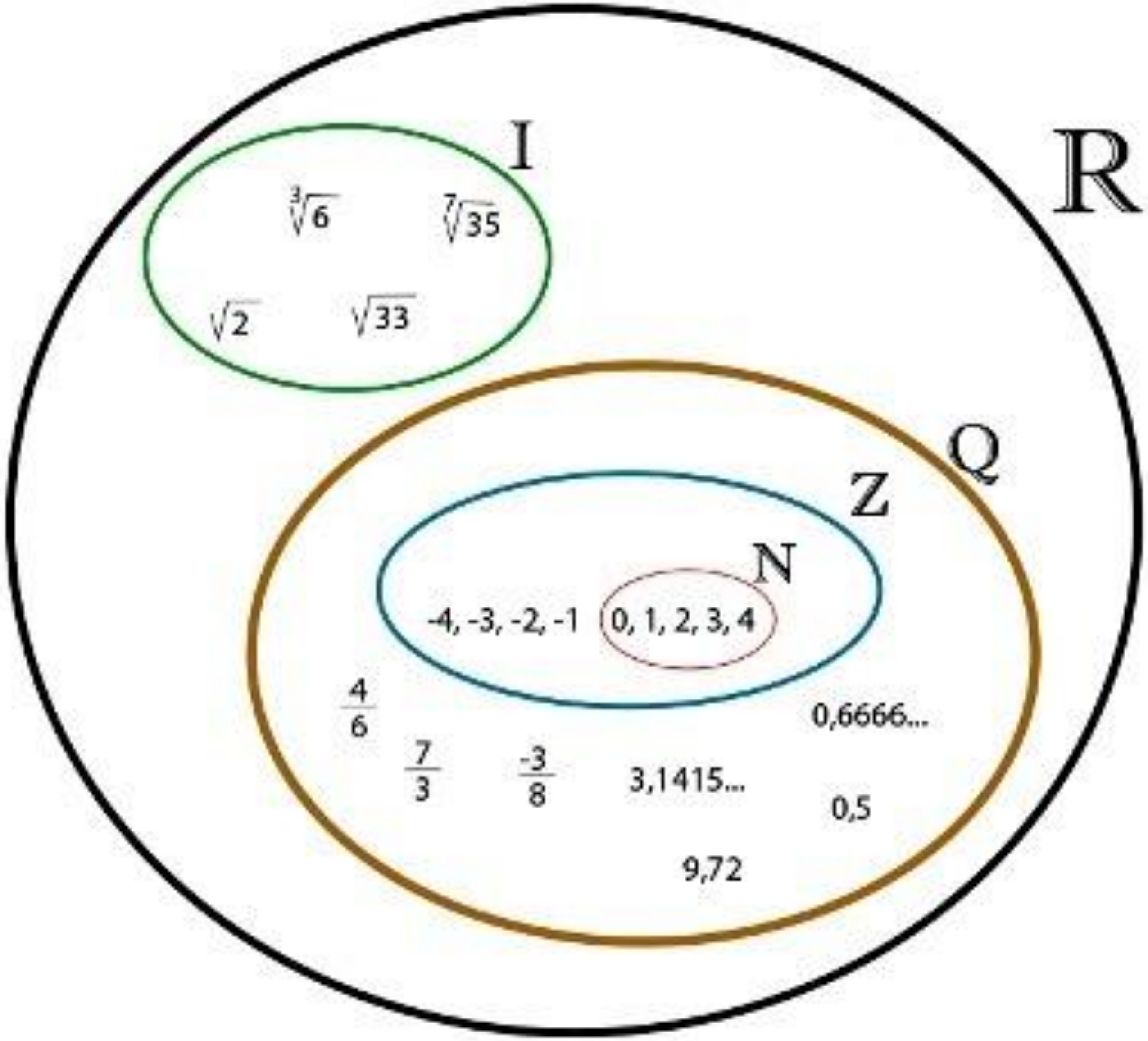
Los ***números irracionales*** Son números con desarrollos decimales infinitos no periódicos, como por ejemplo el número $\pi = 3{,}1415927\ldots$ no es posible escribirlo
como un cociente de números enteros (fracción).

Números Reales

El conjunto de los números reales es infinito y ordenado y tiene como elementos tanto los números racionales como los irracionales. De manera matemática se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Al igual que el conjunto de los racionales, los números reales son densos, esto es, entre dos números reales cualesquiera existe otro número real. Finalmente con los números reales la recta numérica está completa, es decir, a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.



N= números naturales (enteros positivos)
Z= números enteros (positivos y negativos)
Q= números racionales (fracciones y decimales)
I= Irracionales

Al representar los números reales en una recta se pueden observar las siguientes características

A cada punto de la recta le corresponde un único numero real y viceversa

Entre dos números reales siempre es posible encontrar otro numero real

Los números reales forman un conjunto ordenado, de tal forma que entre dos números reales a y b se cumple sólo una de las siguientes proposiciones:

$$a < b \text{ si } b - a > 0$$

$$a = b \text{ si } b - a = 0$$

$$a > b \text{ si } b - a < 0$$

Desigualdades en IR

Una desigualdad es una expresión de la forma $a < b, a > b, a \leq b, a \geq b$, en la que a y b son números reales

Si a , b y c son números reales, entonces, las desigualdades cumplen las siguientes propiedades

- Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces, $a \leqslant c$.
- Si $a \leqslant b$, entonces, $a - c \leqslant b - c$.
- Si $a \leqslant b$, entonces, $a + c \leqslant b + c$.
- Si $a \leqslant b$ y $c > 0$, entonces, $ac \leqslant bc$.
- Si $a \leqslant b$ y $c < 0$, entonces, $ac \geqslant bc$.

Las desigualdades entre números reales se pueden representar en intervalos. Un intervalo es un subconjunto no vacío de números reales, que se representa gráficamente mediante un segmento de la recta real

Los intervalos pueden ser abiertos cerrados o semiabiertos

Si a y b son números reales tales que a<b, entonces, se llama intervalo abierto al conjunto de todos los números reales que son simultáneamente mayores que a y menores que b.

En la notación (a,b) o]a,b[los paréntesis indican que los valores extremos no se incluyen en el intervalo. Graficamente, un intervalo (a,b) se representa así

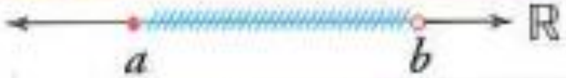
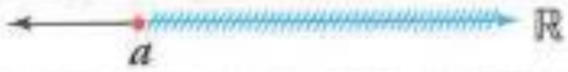
$$(a, b) = \{x \,/\, a < x < b\}$$

Si a y b son números reales tales que $a \leq b$, entonces, se llama intervalo cerrado al conjunto de todos los números reales que son simultáneamente mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

En la notación [a,b] los corchetes indican que los valores extremos se incluyen en el intervalo. Gráficamente, un intervalo [a,b] se representa así

$$[a, b] = \{x \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

En la tabla, se muestran otros intervalos con su respectiva notación y representación grafica

Intervalo	Notación de conjuntos	Representación gráfica
$[a, b)$	$\{x / a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x / a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x / a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x / a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x / x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x / x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad en la que intervienen una o mas variables.

Resolver una inecuación significa determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Una inecuación por lo general tiene infinitas soluciones que forman un intervalo al que se le denomina conjunto solución.

Inecuaciones cuadráticas

Las inecuaciones cuadráticas son expresiones de la forma:

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

En todos los casos $a \neq 0$

Para resolver una inecuación cuadrática se aplican las propiedades de las desigualdades de tal forma que uno de los miembros de la inecuación sea cero y el otro sea la expresión cuadrática. Luego se factoriza si es posible, la expresión cuadrática y se resuelven las inecuaciones lineales correspondientes para determinar el conjunto solución

Si la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente, entonces, se realizan los siguientes pasos:

1. Se expresa la inecuación como una ecuación cuadrática

2. Se aplica la formula cuadrática para hallar la solución de la ecuación

3. Se ubican las soluciones de la ecuación en la recta numérica y se toman los valores de cada intervalo para verificar si son solución de la inecuación. Si los valores que se toman de cada intervalo son solución de la inecuación entonces, el intervalo hace parte del conjunto solución

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación

a. $x^2 - 3x - 18 \geqslant 0$

Primero, se factoriza la expresión cuadrática.

$$(x-6)(x+3) \geqslant 0$$

Segundo, para que la multiplicación sea mayor que cero se puede presentar alguno de los siguientes casos:

Caso 1

$$x - 6 \geqslant 0 \wedge x + 3 \geqslant 0$$

Caso 2

$$x - 6 \leqslant 0 \wedge x + 3 \leqslant 0$$

Tercero, se resuelve cada inecuación lineal en ambos casos.

Caso 1

$$x \geqslant 6 \wedge x \geqslant -3$$

Caso 2

$$x \leqslant 6 \wedge x \leqslant -3$$

Luego, se obtienen los intervalos solución por cada caso, teniendo en cuenta que el conectivo lógico $\wedge$ implica la intersección entre intervalos.

Caso 1

$$[6, \infty) \cap [-3, \infty)$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $[6, \infty)$.

Caso 2

$$(-\infty, 6] \cap (-\infty, -3]$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $(-\infty, -3]$.

Finalmente, se tiene que la solución de la inecuación cuadrática es la unión de los intervalos solución en cada caso. Por tanto, el conjunto solución es:

$$(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$$

b. $x^2 + 6x + 4 < 0$

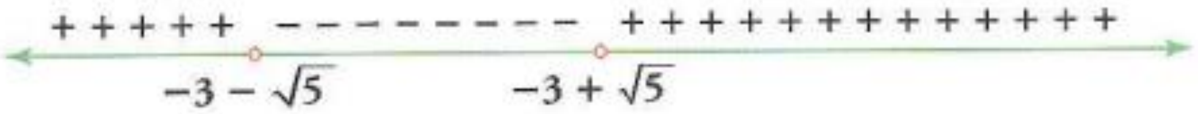
Primero, la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente. Por esta razón, se expresa la inecuación como una ecuación cuadrática y se resuelve, así:

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos posibles soluciones $x_1 = -3 + \sqrt{5}$ y $x_2 = -3 - \sqrt{5}$.

Luego, se ubican las dos soluciones en la recta teniendo en cuenta que $x_1 \approx -0{,}76$ y $x_2 \approx -5{,}24$, y se toman valores en cada intervalo para determinar en cuáles de ellos la expresión cuadrática toma valores menores que cero.



Finalmente, se tiene que la expresión cuadrática $x^2 + 6x + 4$ es menor que cero para los números que están entre $-3 - \sqrt{5}$ y $-3 + \sqrt{5}$, de donde se deduce que el conjunto solución es $\left(-3 - \sqrt{5}, -3 + \sqrt{5}\right)$.

Valor absoluto

El valor absoluto de un numero a, se define como la distancia que hay entre cero y a en la recta numérica. Se simboliza como |a| y cumple con:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Si a b son números reales, entonces, el valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|a| = \sqrt{a^2}$
6. $|a^n| = |a|^n$

Ecuaciones con valor absoluto

Una ecuación con valor absoluto es una expresión de la forma $|ax + b| = c \; con \; c \geq 0$.

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta las siguientes propiedades en las que a es un numero real tal que $a \geq 0$

7. $|x| = a$ si y sólo si $x = a \vee x = -a$
8. $|x| = |b|$ si y sólo si $x = b \vee x = -b$

Ejemplo

a. $\left|3 - \frac{3}{2}x\right| = 5$

Se realizan los siguientes pasos:

$$3 - \frac{3}{2}x = 5 \vee 3 - \frac{3}{2}x = -5$$ Se aplica la propiedad 7.

$$-\frac{3}{2}x = 2 \vee -\frac{3}{2}x = -8$$ Se resta 3.

$$x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{16}{3}$$ Se multiplica por $-\frac{2}{3}$.

Por tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right\}$.

Ejemplo

b. $|4x + 6| = |2x + 8|$

Se realizan los siguiente pasos:

$4x + 6 = 2x + 8 \vee 4x + 6 = -2x - 8$ Se aplica la propiedad 8.

$2x = 2 \vee 6x = -14$ Se reducen los términos semejantes.

$x = 1 \vee x = -\dfrac{14}{6}$ Se divide entre 2 y entre 6, respectivamente.

$x = 1 \vee x = -\dfrac{7}{3}$ Se simplifica.

Por tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$.

Inecuaciones con valor absoluto

Las expresiones de la forma $|ax+b| \leq c$, $|ax+b| \geq c$ $|ax+b| < c$ $|ax+b| > c$ reciben el nombre de inecuaciones con valor absoluto.

Si a es un numero real tal que $a \geq 0$, entonces, las inecuaciones con valor absoluto cumplen las siguientes propiedades:

1. $|x| > a$ si y sólo si $x > a \vee x < -a$.
2. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.
3. $|x| \leqslant |a|$ si y sólo si $x^2 \leqslant a^2$.
4. $|x| \geqslant a$ si y sólo si $x \geqslant a \vee x \leqslant -a$.
5. $|x| \leqslant a$ si y sólo si $-a \leqslant x \leqslant a$.

Ejemplo:

a. $\left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right| > \frac{17}{2}$

Se realizan los siguientes pasos:

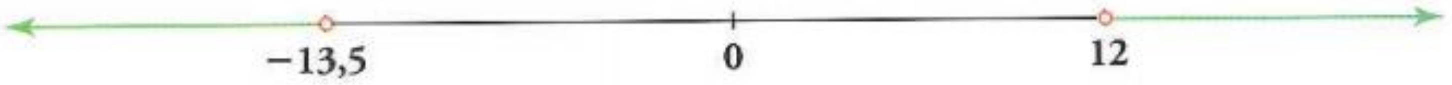
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} > \frac{17}{2} \vee \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} < -\frac{17}{2}$ Se aplica la propiedad 1.

$4x + 3 > 51 \vee 4x + 3 < -51$ Se multiplica por 6.

$4x > 48 \vee 4x < -54$ Se resta 3.

$x > 12 \vee x < -13{,}5$ Se divide entre 4.

Por tanto, la solución corresponde a la unión $(-\infty, -13{,}5) \cup (12, \infty)$, como se muestra en la siguiente recta.



Ejemplo

b. $|4x + 9| \leq 5x$

Primero, se tiene que $5x \geq 0$, de donde $x \geq 0$.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$-5x \leq 4x + 9 \leq 5x$	Se aplica la propiedad 5.
$-5x \leq 4x + 9 \wedge 4x + 9 \leq 5x$	Se analiza cada inecuación por separado.
$-9x \leq 9 \wedge -x \leq -9$	Se reducen términos semejantes.
$x \geq -1 \wedge x \geq 9$	Se multiplica por $-\frac{1}{9}$ y por -1, respectivamente.

Finalmente, como $x \geq 0$, $x \geq -1$ y $x \geq 9$, entonces, se halla la intersección de los intervalos para encontrar el conjunto solución, así:

$[0, \infty) \cap [-1, \infty) \cap [9, \infty) = [9, \infty)$

Así, el intervalo solución es $[9, \infty)$ y su representación en la recta es:

Resolver guía
guia 1 numeros reales.docx

¿Y esto para qué me sirve?

Las desigualdades se aplican en diferentes ámbitos en la toma de decisiones. Así, por ejemplo, las inecuaciones se pueden utilizar para comparar los costos de ciertos productos bancarios, ofrecidos por diferentes entidades financieras.

Uno de esos productos es la cuenta corriente, que es aquella que permite el ingreso de fondos en tiempo real y es útil para el pago y cobro de intereses e impuestos

El manejo de la cuenta corriente se puede realizar por medio de una tarjeta de debito, chequera o talonario, con los cuales es posible efectuar retiros que tienen un costo diferente según la entidad bancaria o las necesidades de los clientes.

A continuación se presentan las tarifas de 2 entidades bancarias

Entidad 1	
Servicio	Costo en pesos
Monto básico	9.350
Retiro cajero entidad	1.020
Retiro cajero externo	3.965
Costo cheque	3.400

Entidad 2	
Servicio	Costo en pesos
Monto básico	10.400
Retiro cajero entidad	1.040
Retiro cajero externo	3.500
Costo cheque	3.320

Por ejemplo, una persona natural quiere abrir una cuenta corriente en un banco para realizar transacciones con cheques, entonces, desea saber para que número de cheques resulta más económico usar la entidad 1 sin importar los retiros por cajero

Por lo tanto si x es el número de cheques emitidos en el mes, entonces, el costo en la entidad 1 debe ser menor que en la entidad 2

$$C_1 < C_2$$

El costo en la entidad 1 sin importar el número de retiros por cajero es la cuota fija más el producto del costo de cada cheque por el número de cheques

$$C_1 = 9350 + 3400x$$

De igual forma se obtiene el costo en la entidad 2

$$C_2 = 10400 + 3320x$$

Reemplazando, la inecuación resultante es

$$9350 + 3400x < 10400 + 3320x$$

Resolviendo la inecuación tenemos que

$$x < 13{,}125$$

Es decir, para que a la persona le convenga la entidad bancaria 1, debe emitir como máximo 13 cheques por mes

Actividad de profundización 1

1. ¿Cómo se aplican las inecuaciones para elegir un producto ofrecido por una entidad bancaria?
2. Si una persona desea abrir una cuenta corriente dependiendo solamente del número de retiros que realiza en cajeros de la entidad durante el mes, ¿para cuántos retiros es más rentable utilizar la entidad 2?
3. Si una persona que viaja constantemente requiere una cuenta corriente que le permita realizar más de cinco retiros en el mes a menor costo, ¿qué entidad debe elegir?
4. Ingresa a las páginas de entidades bancarias del país y busca las tasas y tarifas que ofrece a sus clientes por cada servicio. Luego, plantea inecuaciones que permitan conocer la viabilidad de tomar alguno de los productos que ofrecen estas entidades y explícalas a tus compañeros de clase.

Responder estas preguntas en una hoja de cuadernillo y anexar en tu carpeta

Relación

Para la comprensión del concepto de función es necesario entender la idea de relación. El significado cotidiano de la palabra relación indica que es una correspondencia, o por así decirlo, una conexión que se establece entre dos o mas cosas

Así por ejemplo, en la cotidianidad se pueden definir relaciones como “ser amigo de”, “ser alumno de”, “ser profesor de”, entre otras.

Una relación en matemáticas es una correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos. Así una definición formal de relación es:

> Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces, cualquier subconjunto no vacío R de AXB se llama una relación entre los conjuntos A y B.

Al conjunto A se le denomina conjunto de partida y al conjunto B, conjunto de llegada. Para nombrar las relaciones se utilizan letras mayúsculas como R,F,H,…

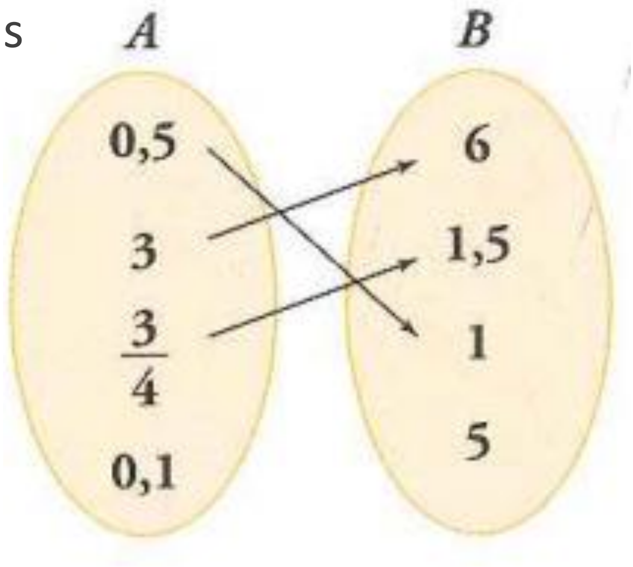
Recordemos que AxB significa producto cruz entre los conjuntos

De este modo la relación G:"ser la mitad de…" definida en los dos conjuntos que se muestran en el diagrama sagital, se aprecia que

- A es el conjunto de salida y B es el conjunto de llegada
- Algunos elementos del conjunto A están relacionados con algunos elementos del conjunto B, por medio de la relación G
- En el diagrama se muestra que: $0{,}5 \rightarrow 1$

Lo anterior se interpreta como: 1 es la imagen de 0,5 y se escribe como la pareja ordenada (0,5;1). Así la relación G se puede expresar como el conjunto de parejas ordenadas

$$G = \left\{(0{,}5; 1), (3; 6), \left(\frac{3}{4}; 1{,}5\right)\right\}$$



Los elementos del conjunto A que tienen imagen en B reciben el nombre de **dominio** de G; los elementos de B que son imagen de algún elemento de A reciben el nombre de **rango** de G

Concepto de función:

Una relación se puede considerar funcional si a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango. Si una relación es funcional se dice que es una función

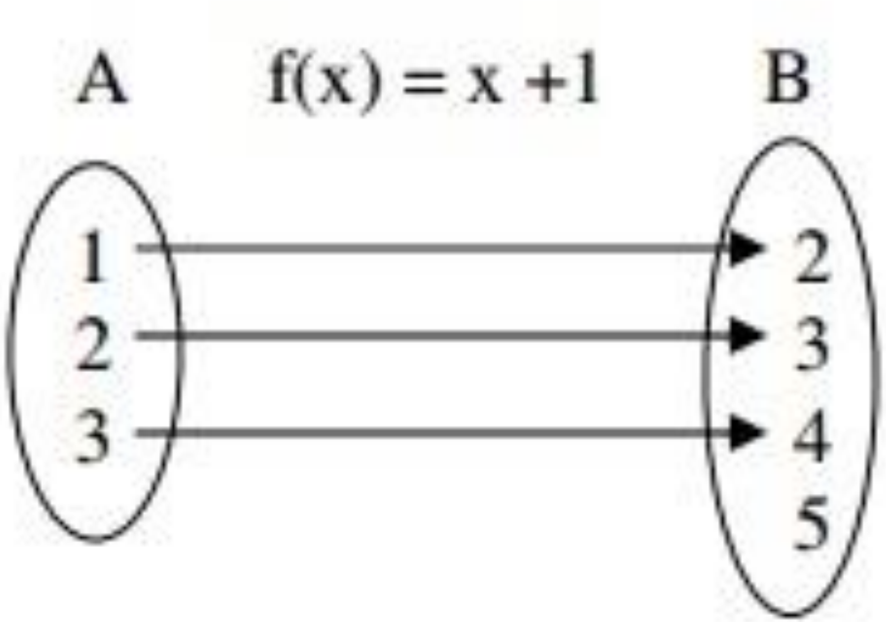
Una función f de A en B es una relación en la que a cada elemento$a \in A$ le corresponde un único elemento $b \in B$

En ***cálculo*** el interés es considerar funciones en las que el dominio y rango son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o **funciones reales**

Para que una relación sea función debe cumplir con las siguientes condiciones

1. Cada elemento del conjunto A debe estar relacionado con un elemento del conjunto B (existencia)
2. Un elemento A no puede relacionarse con dos o mas elementos diferentes de B (unicidad)

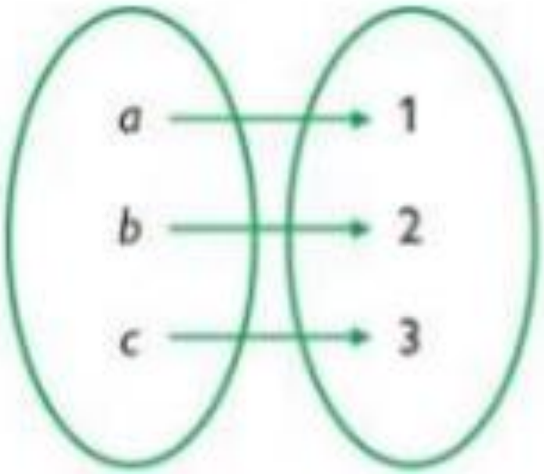
Funciones en diagrama de Venn



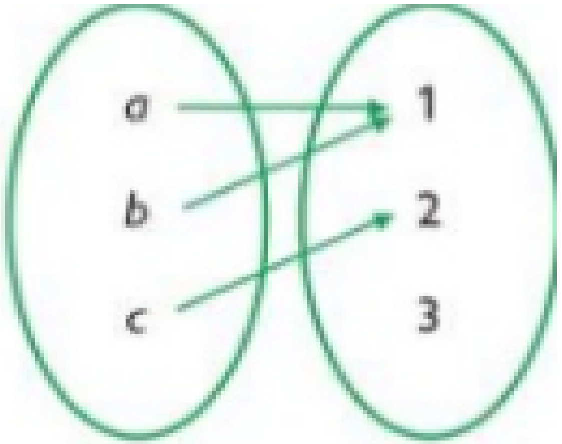

ES FUNCION
X
Y
1
2
3
4
a
b
c
d
SE CUMPLEN LAS
DOS OPERACIONES
NO ES FUNCION
X
Y
1
2
3
4
a
b
c
d
NO SE CUMPLE LA
EXISTENCIA
NO ES FUNCION
X
Y
1
2
3
4
a
b
c
d
NO SE CUMPLE LA
UNICIDAD

Indicar si es función

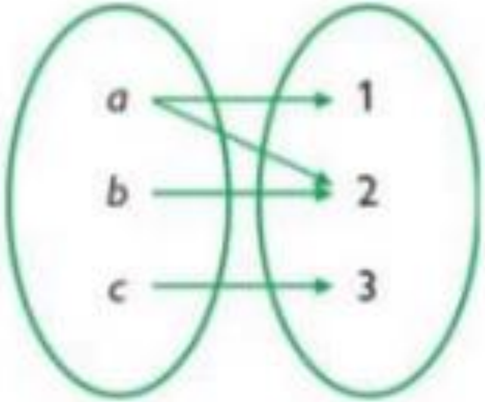
a)



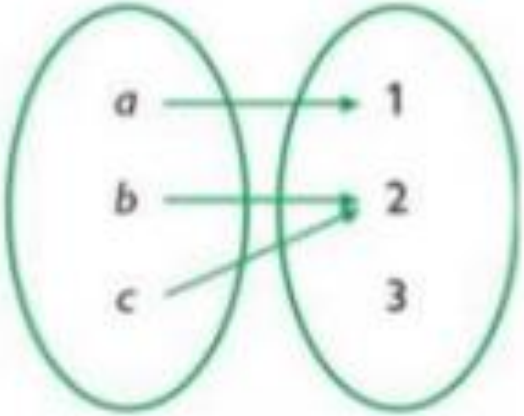
b)



c)

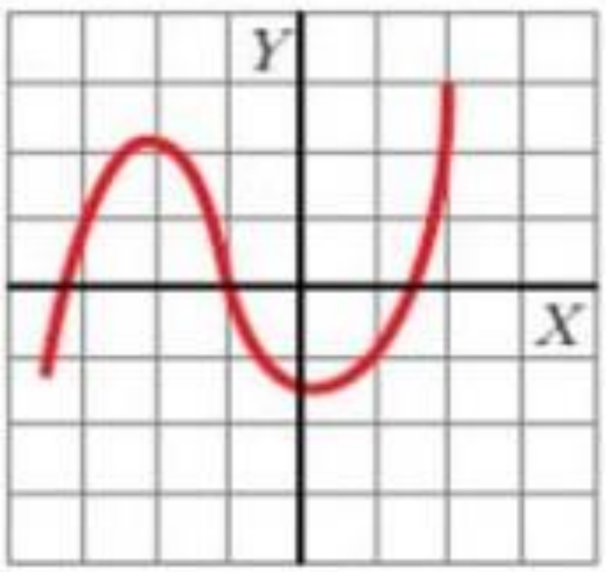


d)



Gráfica de una función

La gráfica de una función y =f(x) es el conjunto de todos los pares (x,y) donde x pertenece al dominio de la función e y = f(x) es el valor que toma la función en el elemento x



Resolver actividad:
guia 2 funciones.docx

Tipos de funciones

Es importante recordar que en el desarrollo del algebra y la trigonometría se ha trabajado con diferentes funciones de variable real, tales como:

Función lineal

Función cuadrática

Funciones trigonométricas

Función exponencial

Función logarítmica

Entre otras.

Una función se puede representar de 3 formas:

- Expresión algebraica
- Tabla de valores
- Gráfica

Todas de la forma $y = f(x)$ donde x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**

Dominio y recorrido

El dominio, Dom(f), de una función es el conjunto de valores para los que está definida la función. Para que la función quede determinada se ha de definir su dominio.

- Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente

El recorrido, Rec(f), de una función es el conjunto de todas las imágenes.

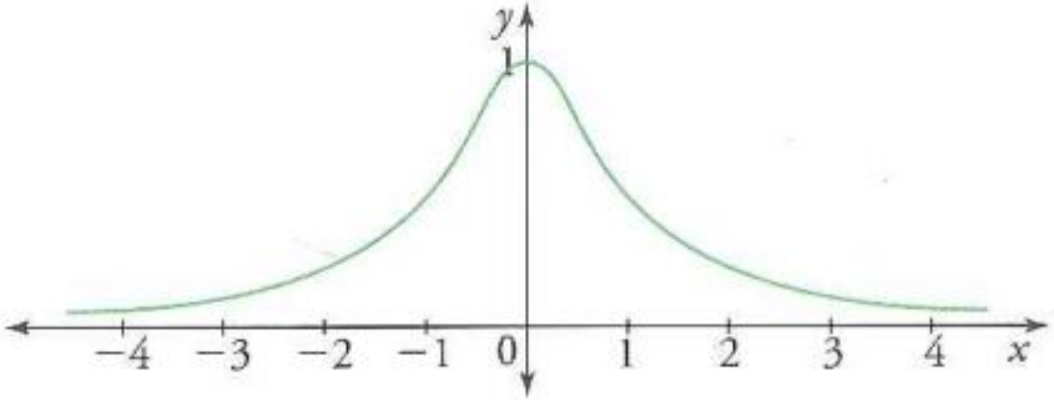
- También se le llama imagen codominio o rango, es el conjunto de valores que toma la variable independiente

Las funciones de variable real se pueden representar geométricamente mediante una grafica en el plano cartesiano, donde el dominio de la función corresponde al eje x y el rango se asocia con los valores del eje y, tal que $y = f(x)$

Para encontrar el dominio de una función se despeja la variable y se buscan las restricciones que tiene x. Del mismo modo para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y

Ejemplo: Hallar dominio y recorrido de f

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

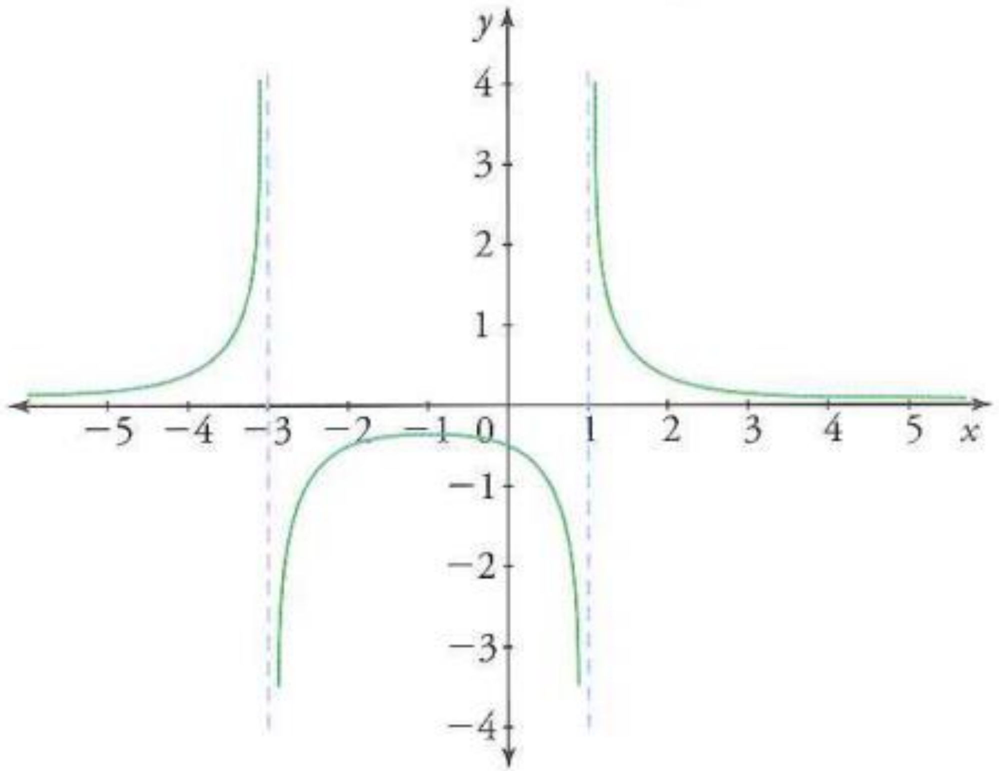


Al observar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, se tiene: Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = (0, 1]$.

¿Como lo harías de forma algebraica?

Ejemplo: Hallar dominio y recorrido de g

b. $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3}$



En la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3}$ se tiene:

Dom $g = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$ y Ran $g = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup (0, \infty)$.

Ejemplo: Un granjero utiliza 200 metros lineales de malla para cercar un terreno rectangular

a) Obtener una función $y = f(x)$ que exprese el área y, en metros cuadrados, del terreno en función de la medida x, en metros, de uno de los dos lados del terreno.

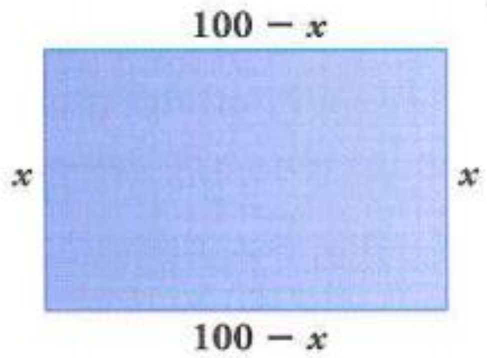
Primero, se indica por x la medida, en metros, de un lado del terreno, como el perímetro del terreno es 200 m, entonces, las otras dimensiones, en metros, son:

$$x \qquad (100 - x) \qquad (100 - x)$$

Finalmente, el área y del terreno está dada por:

$$f(x) = (100 - x) \times x = -x^2 + 100x$$

$$y = -x^2 + 100x$$



b) ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?

Sin considerar el contexto, Dom $f = \mathbb{R}$.

Sin embargo, en el contexto del problema, los valores de x se limitan a las posibles medidas de un lado del terreno.

Como el perímetro del terreno es 200 m, se tiene:

$$0 < x < 100$$

Por tanto, Dom $f = (0, 100)$.

Atividad: [guia 3 dominio y recorrido.docx]

Repasemos un poco las funciones que ya conocemos

Veamos el siguiente video

Gráficas de funciones lineales

Ejemplos:

- Recta que pasa por B (1,3)

  ¿Cuál es su pendiente?

  ¿Cuál es su ecuación?

- Recta que pasa por C (-2,2)

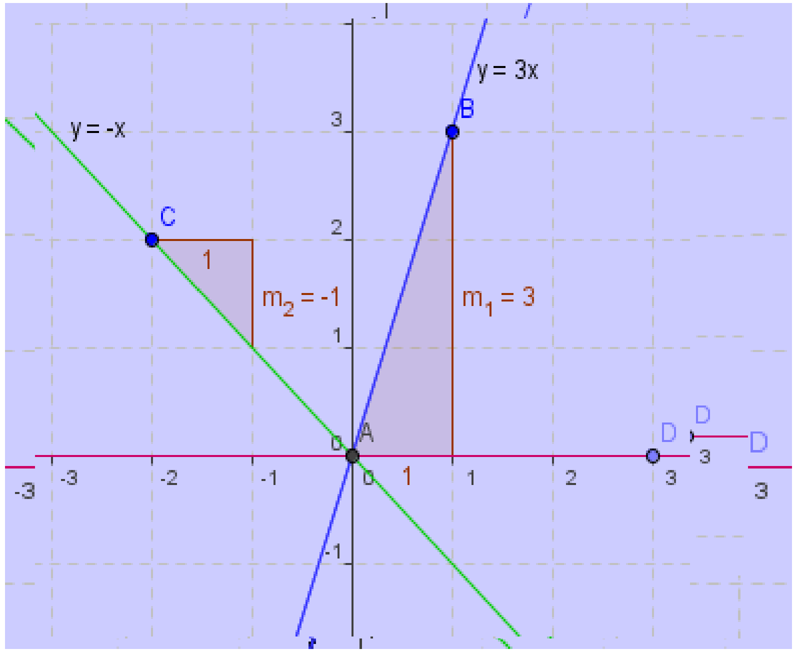
  ¿Cuál es su pendiente?

  ¿Cuál es su ecuación?

- Recta que pasa por D (3,0)

  ¿Cuál es su pendiente?

  ¿Cuál es su ecuación?



Ejemplo: Graficar las siguientes funciones

$f(x) = 2x$

$g(x) = \frac{1}{2}x$

$h(\mathrm{x}) = -3\mathrm{x}$

Funciones afines

Una función es afín si verifica una de las siguientes condiciones:

- Su gráfica es una recta que no pasa por el origen de coordenadas.
- Su expresión analítica es de la forma $y = m \cdot x + n$, $n \neq 0$

La constante m se denomina pendiente de la recta e indica la variación de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x.

La constante n se denomina ordenada en el origen y determina el punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas.

La gráfica de una función afín

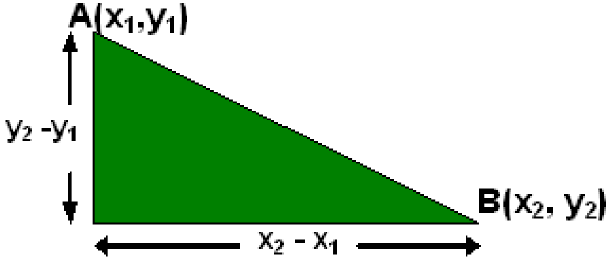
La gráfica de una función afín es el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $y = m \cdot x + n$, $n \neq 0$

Esta gráfica es una recta que no pasa por el origen.

Las funciones afines son crecientes, decrecientes o constantes dependiendo de que la pendiente m sea, respectivamente, positiva, negativa o nula.

La pendiente, m, de la recta que pasa por los puntos A (x1, y1) y B (x2, y2) es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplo: Graficar las siguientes funciones

$f(x) = x + 3$

$g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$h(\mathrm{x}) = -2\mathrm{x} - 2$

Función Cuadrática

Una función es cuadrática si verifica una de las siguientes condiciones:

- Su gráfica es una parábola
- Su expresión analítica es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son núm to de cero

- ax^2 es el término cuadrático
- bx es el término lineal
- c es el término independiente

Gráfica de una función cuadrática

La parábola es la representación gráfica de una función cuadrática.

Sus elementos son:

Orientación o concavidad:

- Esta definida por el signo del coeficiente de x^2

  Si $a>0$ la parábola es cóncava (sus ramas van hacia arriba)

  Si $a<0$ la parábola es convexa (sus ramas van hacia abajo)

Puntos de corte con el eje de abscisas (raíces de la ecuación cuadrática)

- para calcular las raíces (soluciones) de cualquier función cuadrática calculamos $f(x) = 0$.

  Esto significa que las raíces (soluciones) de una función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0 ($ax^2 + bx + c = 0$). Así:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Punto de corte con el eje de ordenadas

- Punto donde la grafica pasa por el eje Y.

  Esta definido como el punto (0,c)

Eje de simetría

- El **eje de simetría** de una parábola es una recta vertical que divide simétricamente a la curva

  Esta definida por la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Vértice

- El **vértice** de la parábola es el punto de corte (o punto de intersección) del eje de simetría con la parábola.

  Esta definido por el punto

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Ejemplo

- Graficar las funciones indicando
  - Orientación o concavidad (ramas o brazos)
  - Puntos de corte con el eje de abscisas (raíces)
  - Punto de corte con el eje de ordenadas
  - Eje de simetría
  - Vértice

- $F(x) = x^2 - 4x + 3$
- $F(x) = 2x^2 + 5x + 3$

Función exponencial

Sea a un número real. La función que a cada numero real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x

Esto es:

$$f(x) = a^x, \qquad con\, a \in \mathbb{R}$$

Características de la función exponencial

- ✓Dominio: IR
- ✓Recorrido: IR+
- ✓Es una función continua
- ✓Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica
- ✓Es inyectiva para todo $a \neq 1$
- ✓Creciente si $a > 1$
- ✓Decreciente si $0 < a < 1$

Ejemplo: Graficar las funciones

$f(x) = 2^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

¿Qué podemos concluir con respecto a las gráficas anteriores?

Función logarítmica

- Recordemos la definición de logaritmo:
  - El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número.

$$log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad a > 0, a \neq 1$$

  - Siendo **a** la base **x** el numero e **y** el logaritmo.

Ejemplo: Calcular los siguientes logaritmos

- $\log_2 8 =$
- $\log_3 81 =$
- $\log_{10} 0{,}1 =$

Función logarítmica

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a

Es de la forma

$$f(x) = log_a x$$

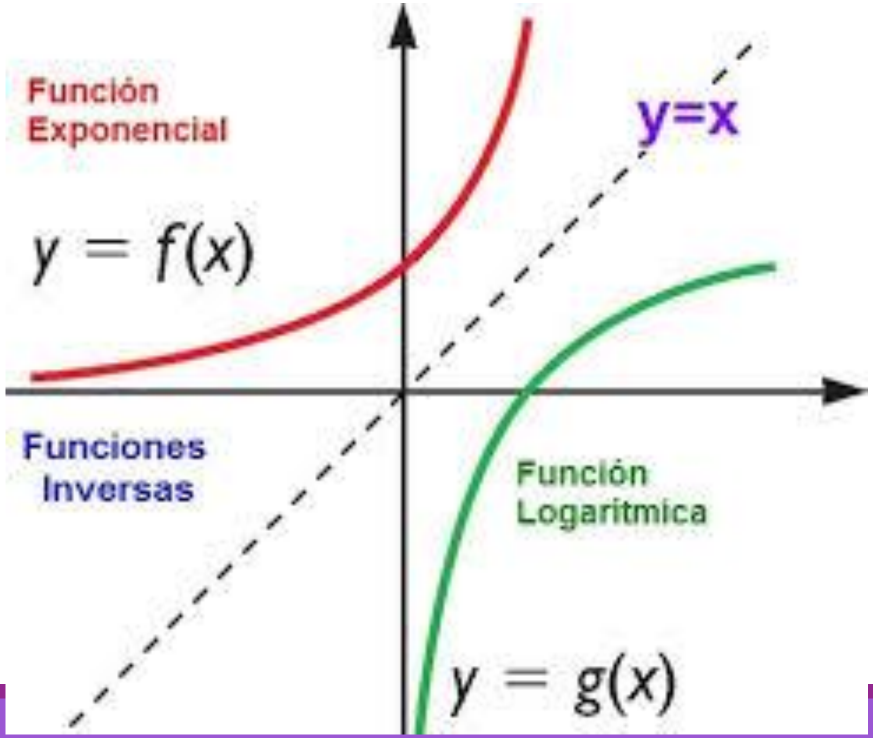
$$a > 0, a \neq 1$$

Propiedades

- ✓Dominio: IR+
- ✓Recorrido: IR
- ✓Es continua
- ✓Es inyectiva
- ✓Creciente si a> 0
- ✓Decreciente si 0<a<1

Grafica de la función logarítmica

Las gráfica de la función logarítmica es simétrica (respecto a la función identidad) de la gráfica de la función exponencial, ya que son funciones inversas entre sí.



Ejemplo: Graficar las funciones

$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = \log_2(x + 1)$

$f(x) = \log_2(x + 1) - 1$

¿Qué podemos concluir de las siguientes gráficas?¿Cómo podemos relacionar las tres gráficas? Explica qué generalidad encontraste.

Propiedades de las funciones

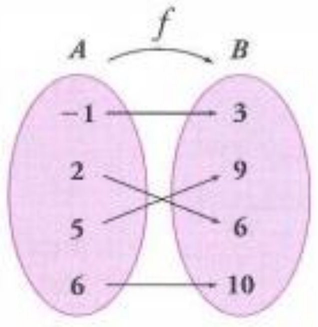
- Inyectiva:

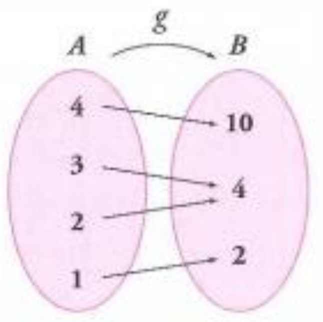
Una función $f: A \to B$ es inyectiva si a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen. Formalmente:

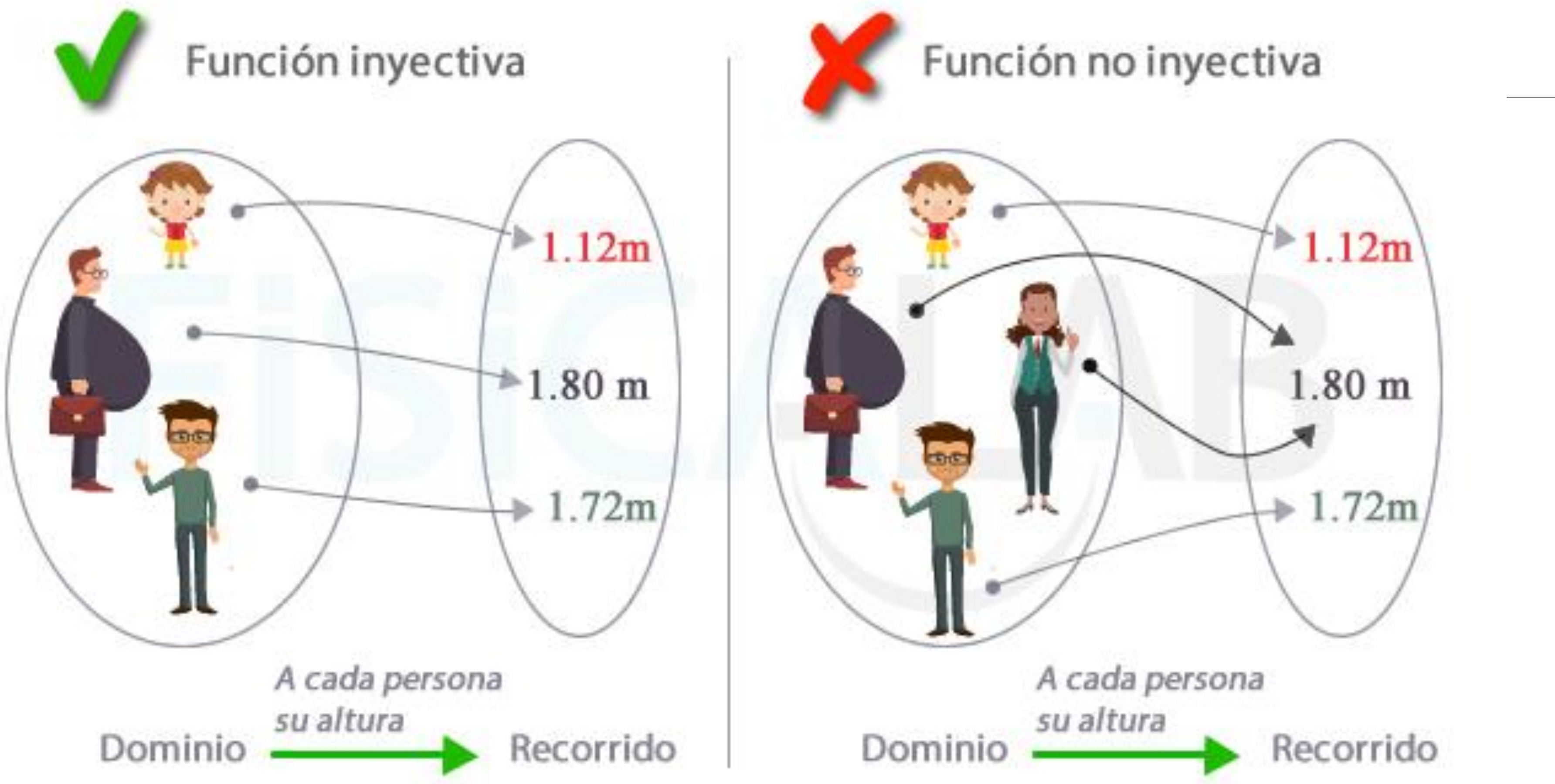
$$\forall a, b \in Dom_f \text{ , si } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Es decir, para cualesquiera dos elementos a y b, pertenecientes al dominio de la función Domf, si sus imágenes f(a) y f(b) son iguales, los elementos son necesariamente iguales.

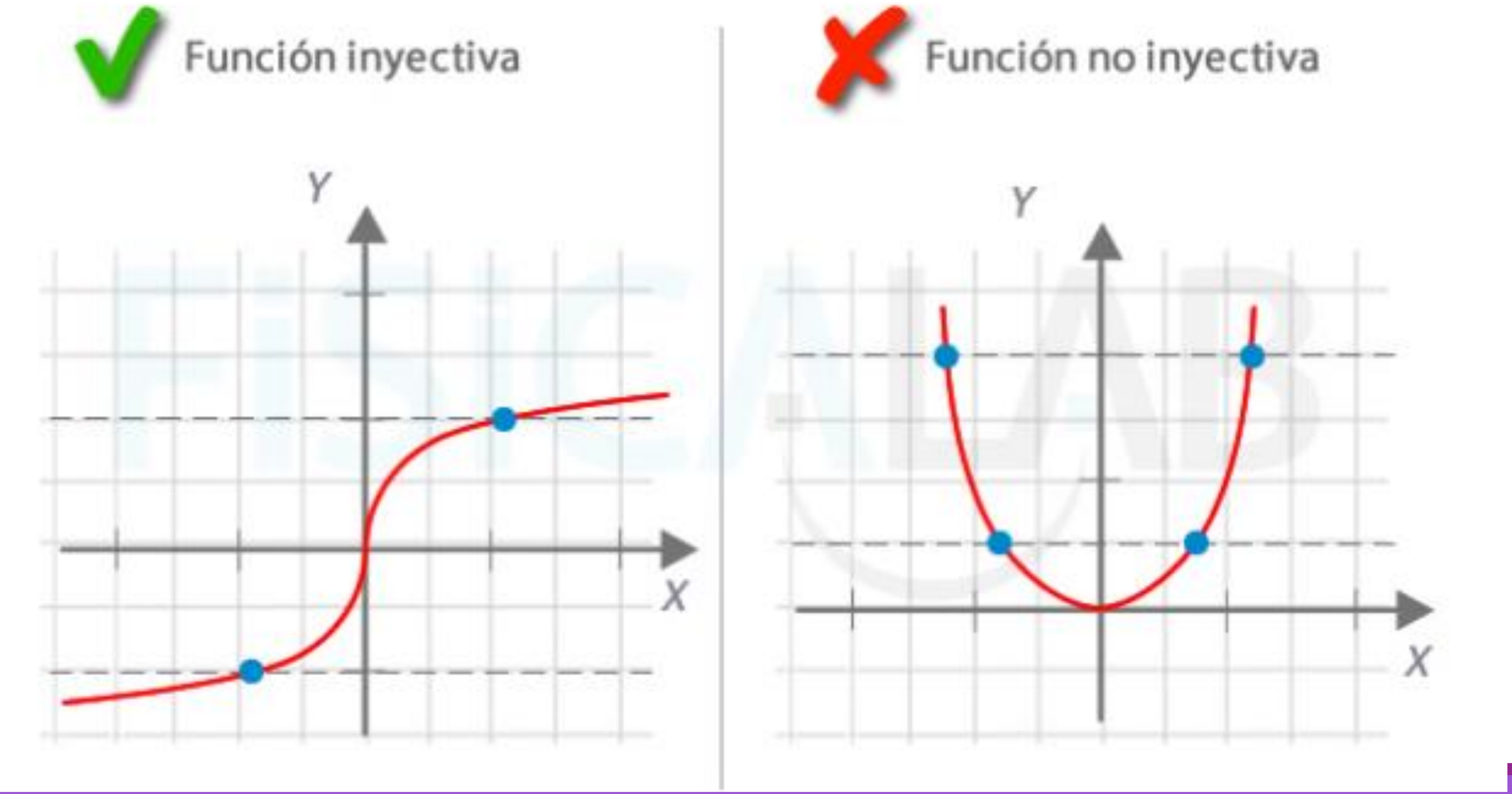
En el diagrama se aprecia una función inyectiva y una que no lo es ¿Podrías determinar cual es cual?¿Por qué tomaste esa determinación ?






Función inyectiva
1.12m
1.80 m
1.72m
A cada persona
su altura
Dominio
Recorrido
Función no inyectiva
1.12m
1.80 m
1.72m
A cada persona
su altura
Dominio
Recorrido

Gráficamente si trazamos una recta horizontal paralela al eje x y corta la grafica en mas de un punto, la función no seria inyectiva



Ejemplo: probar que la función de variable real $f(x) = 2x + 1$ es inyectiva

Por definición de inyectividad $Si\ f(a) = f(b) \rightarrow a = b$

Por lo tanto tomamos $a, b \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f(a) = f(b)$

$$f(a) = f(b)$$

Reemplazamos en la función

$$2a + 1 = 2b + 1$$

Simplificamos la igualdad restando 1

$$2a = 2b$$

Simplificamos la igualdad dividiendo por 2

$$a = b$$

Por lo tanto f es inyectiva

- Sobreyectiva: Una función es sobreyectiva cuando el codominio y el recorrido coinciden. Formalmente:

$$\forall y \in Cod_f \; \exists x \in Dom_f \; / \; f(x) = y$$

- Las funciones reales son sobreyectivas cuando Recf=$\mathbb{R}$,
- Para determinar si una función es sobreyectiva se debe explicitar cual es el conjunto de llegada o codominio y el rango de la función real

Ejemplo: Verificar si la función de variable real $f(x) = x^2\ - 1$ es sobreyectiva

Se identifica el codominio y el rango de la función real, así:

En este caso el codominio de la función es el conjunto de los números reales

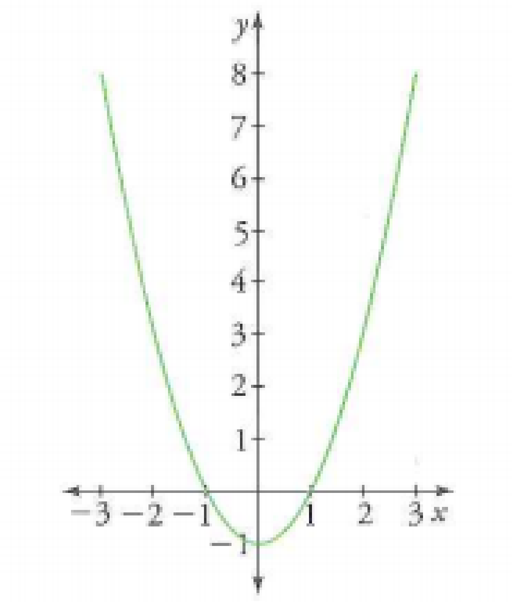
Ahora se halla el rango como sigue:

$y = x^2 - 1$ Función dada.

$x^2 = y + 1$ Se suma 1 y se organiza.

$x = \pm\sqrt{y+1}$ Se despeja x.

Como $y + 1 \geqslant 0$, entonces, $y \geqslant -1$.



Luego el rango de f está determinado por el intervalo $[-1, \infty)$

Finalmente como el codominio de la función y el rango no coinciden, se concluye que la función no es sobreyectiva, como se muestra la figura.

Biyectiva: Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Nota: Si la función es biyectiva podemos encontrar su función inversa.

Ejemplo: Comprobar si la función de variable real $f(x) = x^3 - 2$ es biyectiva

Se analiza si es inyectiva y sobreyectiva a la vez

<u>1. Inyectiva:</u> Se asume por definición que si $f(a) = f(b), entonces\ a = b$ por lo tanto

$$f(a) = f(b)$$
$$a^3 - 2 = b^3 - 2$$

Resolviendo ambos lados de la igualdad tenemos que

$$a = b$$

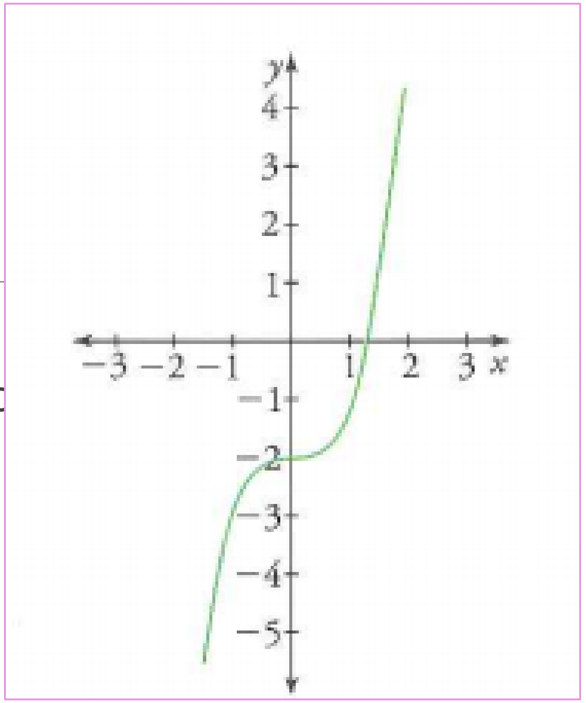
Luego la función es inyectiva

<u>2.Sobreyectiva:</u> hacemos $y = f(x)$ y luego despejamos x

$$y = x^3 - 2$$
$$y + 2 = x^3$$
$$\sqrt[3]{y + 2} = x$$

Luego $Recf = IR$. De este modo la función es sobreyectiva.

Finalmente la función es biyectiva, como se muestra en la figura.



Es importante tener en cuenta que hay casos en los cuales despejar la variable x es un trabajo complejo. Por lo tanto, para verificar si una función es biyectiva se utiliza su representación grafica

Actividades:

Resolver: guia 4 funciones biyectivas.docx

Simetría de funciones

La simetría es un rasgo característico de firmas geométricas, como los poligonos regulares, e incluso de algunos elementos de la naturaleza como las hojas de los arboles o el mismo rostro humano

En calculo, el concepto de simetría se relaciona directamente con la forma que tiene la grafica de una función en el plano cartesiano. De esta forma se determinan dos aspectos que definen algebraicamente la simetría en euna función

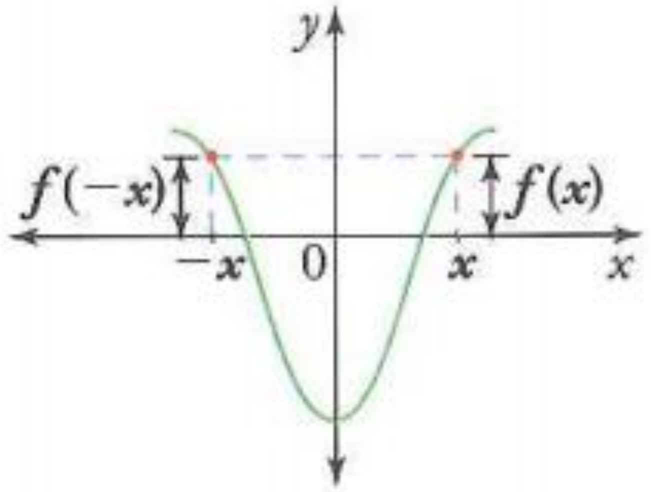
1. Si la función es par

2. Si la función es impar

Se dice que la función es par si es simétrica con respecto al eje y, por ejemplo la función que se muestra en la imagen es par, en ella se observa que el eje y es el eje de simetría

Una función es par si para cualquier numero real x en su dominio, el número –x esta también en su dominio y se cumple que :

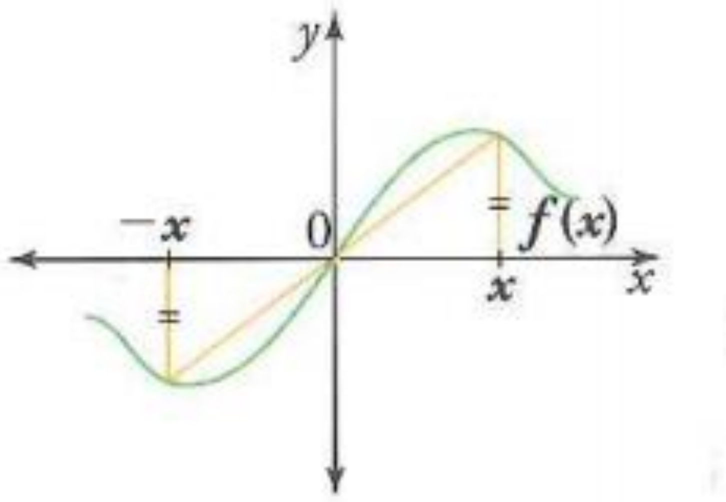
$$f(x) = f(-x)$$



En forma similar, se dice que una función es impar si es simétrica con respecto al origen, por ejemplo, la función que se muestra en la figura es impar

Una función es impar si para cualquier numero real x en su dominio el numero –x esta también en su dominio y se cumple:

$$f(-x) = -f(x)$$



Ejemplo: determinaremos si la función es par o impar

1. $f(x) = x^4 + 15$

Calculamos $f(-x) = (-x)^4 + 15 = x^4 + 15$

$f(x) = f(-x)$

Por lo tanto f es par

2. $g(x) = x^3$

Calculamos $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$g(-x) = -g(x)$

Por lo tanto g es impar

3. $h(x) = 7x^3 + 2$

Calculamos $h(-x) = 7 \cdot (-x)^3 + 2 = -7x^3 + 2$

$h(x) \neq h(-x) \quad y \quad h(-x) \neq -h(x)$

Por lo tanto h no es par ni impar

Funciones crecientes y decrecientes

Una función $f: A \to B$ es creciente en un intervalo I si para cualquier $a, b \in I$ se tiene que si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Una función $f: A \to B$ es decreciente en un intervalo I si para cualquier $a, b \in I$ se tiene que si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

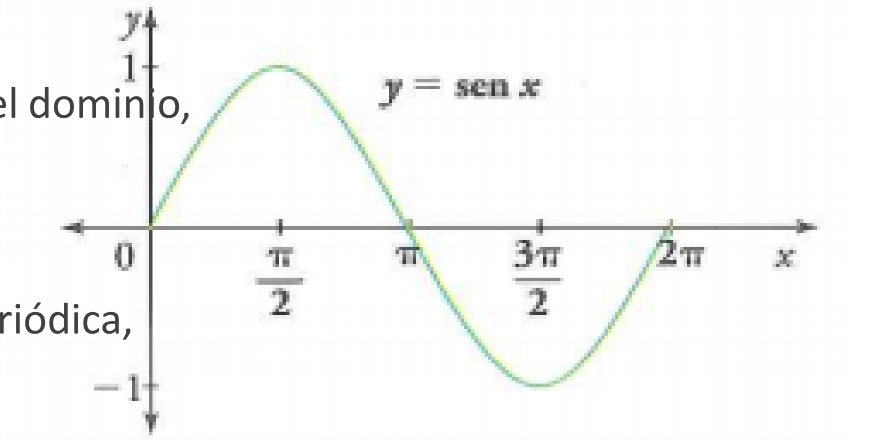
Por ejemplo , la función que se muestra en la figura presenta diferencias en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] y \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

En $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función crece por que a medida que aumentan los valores en el dominio aumentan los valores en el rango

En $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función decrece, por que a medida que aumentan los valores en el dominio, disminuyen los valores en el rango

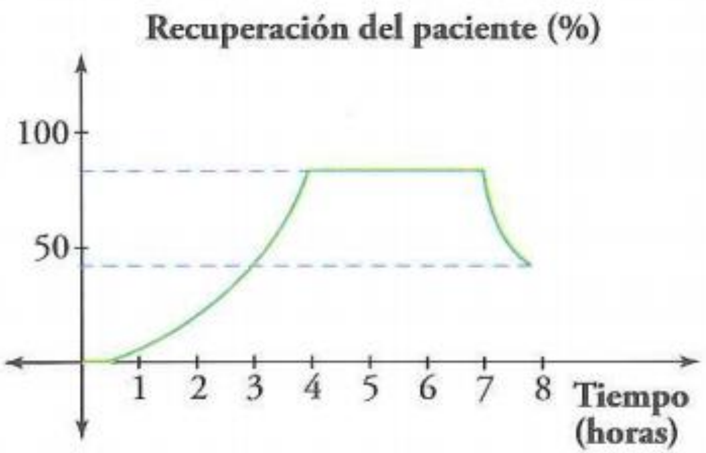
Por último, en $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ la función crece

Es importante tener en cuenta que la función $f(x) = sen\ x$ es una función periódica, luego este comportamiento es similar cada 2π veces



Ejemplo:

El efecto de cierto medicamento en el cuerpo de un paciente, después de haber ingerido la primera dosis, se representa en la siguiente gráfica, que relaciona la recuperación del paciente con el tiempo de acción. Analizar el comportamiento de esta función.



Desde que se ingiere el medicamento hasta la primera media hora se puede inferir que el efecto en el cuerpo es nulo, pues la función es constante. Es decir, no crece ni decrece.

Entre la primera media hora y las cuatro horas, el medicamento inicia su efecto en forma creciente. Luego, la recuperación permanece constante hasta la hora siete después de haber sido ingerido, momento en el cual empieza a disminuir la recuperación en el paciente.

Actividad: guia 5 funciones simetría crec..docx

Clasificación de funciones

Polinómicas: polinómica general, constante, lineal, afín, cuadrática, etc.

Racionales

Radicales

Trascendentes

Especiales

Funciones polinómicas

La forma general de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Con $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}\ y\ a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0,1,2, \ldots, n$.

Según el grado del polinomio planteado, dichas funciones se pueden clasificar en:

- Constante
- Lineal o afin
- Cuadrática
- Cúbica
- Polinómica general

Funciones racionales

Una función es racional si es de la forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)\ \ y\ \ Q(x)$ son polinomios y $Q(x)\neq 0$

El dominio esta formado por todos los números reales excepto los ceros del polinomio que esta en el denominador

Para realizar la gráfica de una función racional, se determinan las raíces o ceros del numerador y del denominador, es decir, los valores de x para los cuales la función $f(x)=0\ y\ f(x)$ no está definida. Luego se identifican las asíntotas verticales y horizontales

Dada la función

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

Dada la función

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Asíntotas verticales:

Si $P(x)$y $Q(x)$ no tienen factores comunes, la recta x=b es una asíntota vertical de$f(x)$ si b es un número tal que $Q(b) = 0$

Asíntotas horizontales:

- Si $n < m$, entonces la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal
- Si $n = m$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (eje x) es una asíntota horizontal
- Si $n > m$, entonces la función no tiene asíntota horizontal

Ejemplo: Realizar la gráfica de la función $h(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$.

Paso 1: Determinar el dominio de la función

¿Cuando se indetermina la función?

Como $x^2 - 9 = 0$ cuando $x = -3 \ o \ x = 3$, entonces, $Domf = \mathbb{R} - \{-3,3\}$.

Con este resultado se deduce que las rectas $x = -3 \ y \ x = 3$ son asíntotas verticales de $h(x)$.

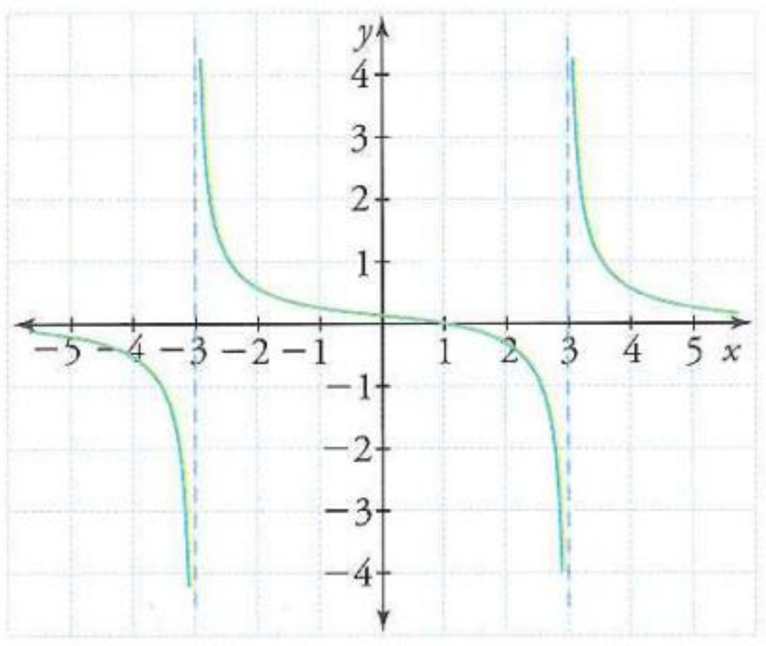
En $h(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$ se tiene que el mayor exponente del polinomio en el numerador es 1 y el mayor exponente del polinomio en el denominador es 2, entonces como $1 < 2$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

Luego se realiza una tabla de valores con números lado y lado de las asíntotas verticales

x	$h(x)$
-4	$-0{,}71$
-2	$0{,}6$
-1	$0{,}25$
0	$0{,}11$
1	0
2	$-0{,}2$
4	$0{,}42$

Finalmente para realizar la grafica se trazan primero las rectas asíntotas

Luego se ubican los puntos encontrados en la tabla de valores y se traza el bosquejo de la grafica de la función, como se muestra en la figura



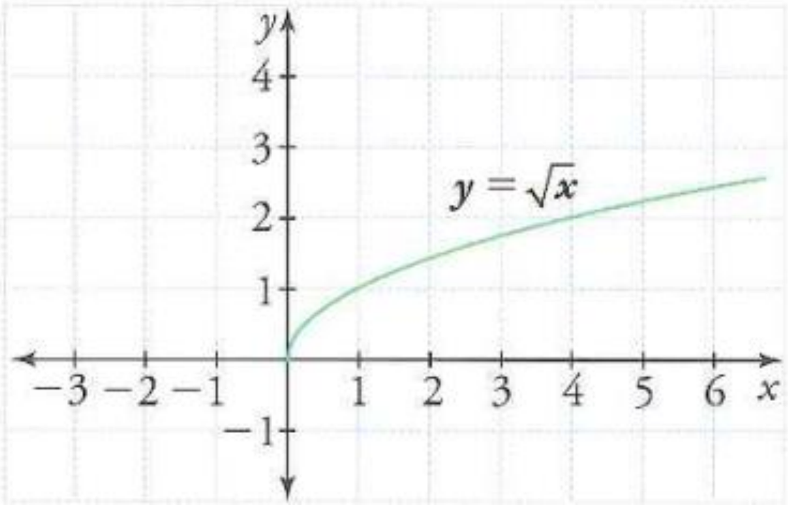
Funciones radicales

Una función radical es una función que contiene raíces de variables.

Por ejemplo, las funciones definidas como $f(x) = \sqrt{8 - 3x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 5x}$,

$h(x) = 2x^3 - 5x^{\frac{1}{4}}$ y $k(x) = \dfrac{8x + 4}{\sqrt{2x - 1}}$

Grafica de $f(x) = \sqrt{x}$



El dominio de una función depende del índice de la raíz

Si el índice es par la función no estará definida para valores de x para los cuales el radicando es negativo, o los que generen restricciones en el mismo

Si el índice es impar, la función está definida para todos los números reales, excepto los valores de x que generes restricciones en el radicando.

Por ejemplo, en la función radical $f(x) = \sqrt{x}$, el dominio y el rango son:

$$Domf = [0, \infty) \quad y \quad Recf = [0, \infty)$$

Ejemplo 1: Trazar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\frac{4x+2}{x-2}}$

Realizar el procedimiento para buscar el dominio de la función. Al realizar los cálculos correctos deben llegar a que:

$$\text{Dom } f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (2, \infty)$$

Realizar el procedimiento para buscar las asíntotas. Deberian llegar a que:

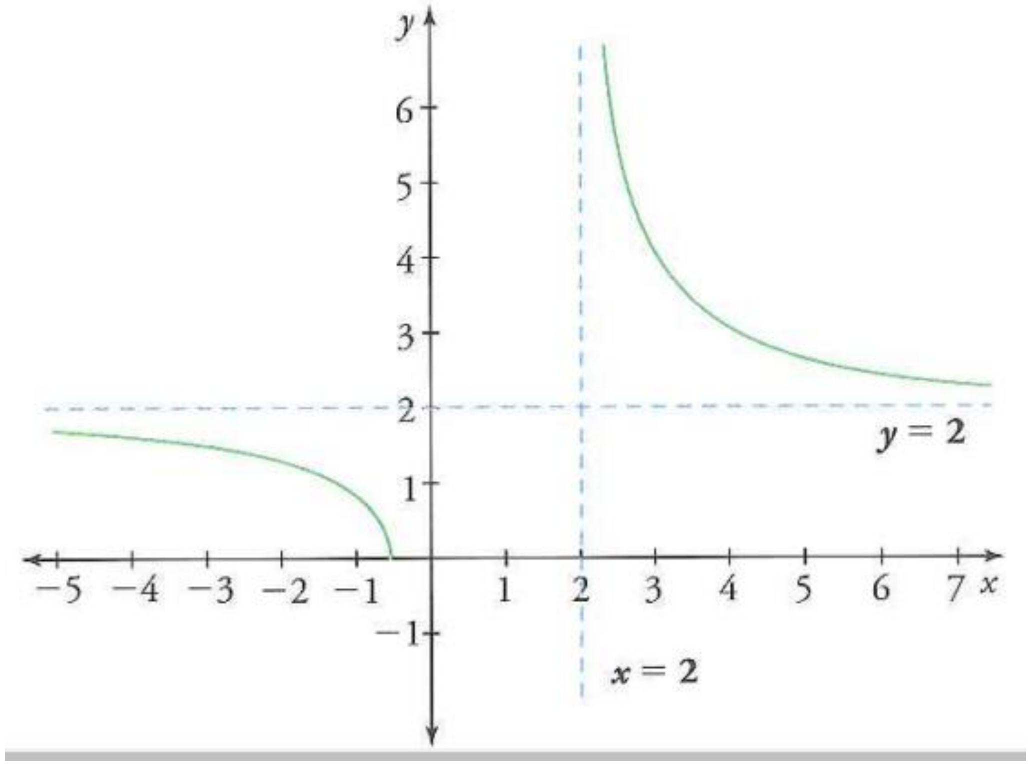
$x = 2$ es asíntota vertical

$y = 2$ es asíntota horizontal

La tabla de valores muestra el comportamiento de la función

x	-4	-3	-2	-1	3	4	5
$f(x)$	1,52	1,41	1,22	0,81	3,7	3	2,7

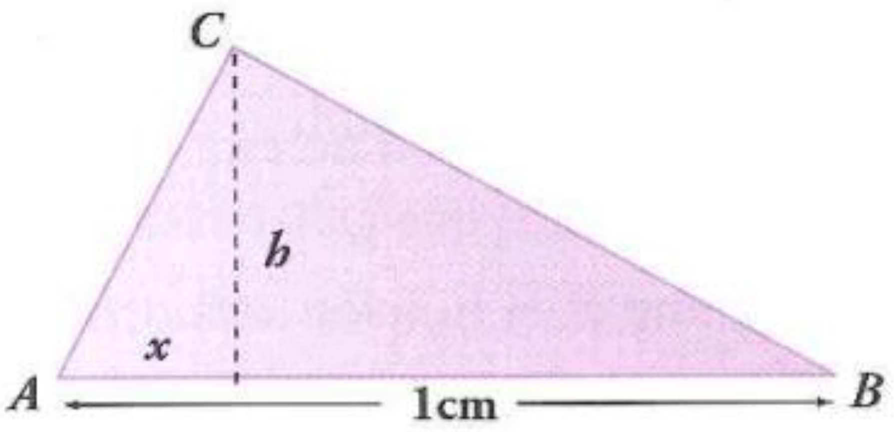
Luego, la gráfica de la función es:



$$\text{Ran } f = [0, \infty) - \{2\}$$

Al observar la gráfica se tiene que

2. Considerar el triángulo rectángulo ABC, representado en la siguiente figura, donde x es la distancia del vértice A al pie de la perpendicular trazada desde C al lado AB.



a. Encontrar la función h que determina la longitud de la altura del triángulo en función de x.

b. Hallar el dominio de la función resultante.

Actividad: guia 6 tipos d funciones.docx

Desarrollar ejercicio en cuadernillo y adjuntar a su carpeta

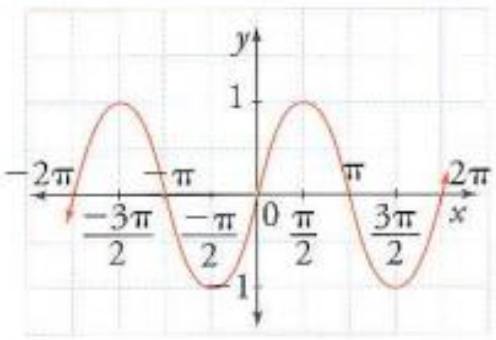
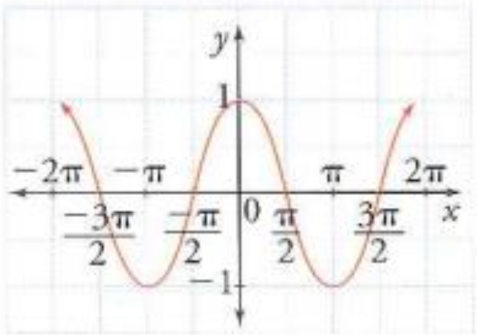
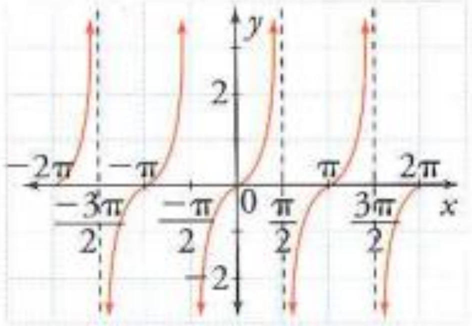
Funciones trascendentes

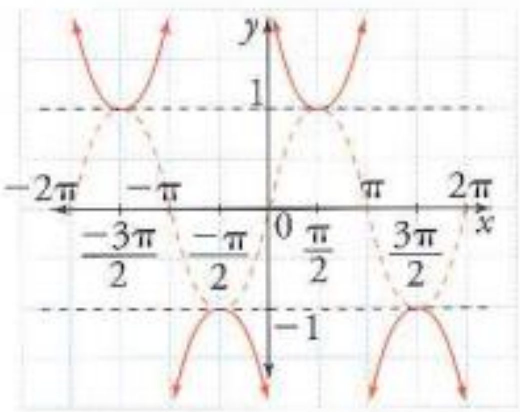
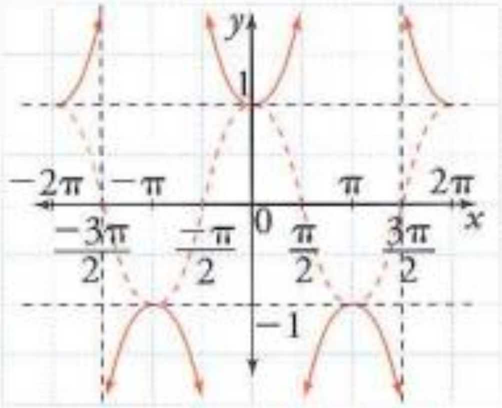
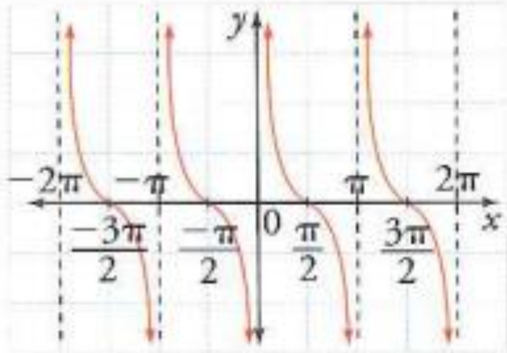
Las funciones trascendentes tienen la particularidad que la variable independiente toma las veces de exponente, está afectada por un logaritmo o por una función trigonométrica

Así las siguientes son funciones trascendentes

- Función exponencial
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas y sus principales características

$f(x) = \text{sen } x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \tan x$
		
Dom $f = \mathbb{R}$ Ran $f = [-1, 1]$ Período: 2π, ya que sen x =sen $(x + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es una función impar. Interceptos con los ejes: $x = n\pi$, para n entero. $y = 0$	Dom $f = \mathbb{R}$ Ran $f = [-1, 1]$ Período: 2π, ya que $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es una función par. Interceptos con los ejes: $x = \frac{n\pi}{2}$, para n entero impar. $y = 1$	Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}; n \text{ entero impar}\right\}$ Ran $f = \mathbb{R}$ Período: π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. Interceptos $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = 0$.

$f(x) = \csc x$	$f(x) = \sec x$	$f(x) = \cot x$
		
$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$ $\text{Ran } f = \mathbb{R} - (-1, 1)$ Período: 2π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Interceptos No corta a los ejes.	$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2};\ n \text{ entero impar}\right\}$ $\text{Ran } f = \mathbb{R} - (-1, 1)$ Período: 2π Es una función par. Asíntotas verticales $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. Interceptos No corta al eje x, $y = 1$.	$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$ $\text{Ran } f = \mathbb{R}$ Período: π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Interceptos $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. No corta al eje y.

Actividad: guia 7 funciones trascendentes.docx

Funciones especiales

Algunas funciones no están descritas solamente por una expresión algebraica o algunas otras no presentan una grafica con un trozo continuo, tales funciones requieren un tratamiento especial por lo cual se estudian de manera independiente. Este tipo de funciones son

- Funciones a trozos
- Valor absoluto
- Parte entera

Funciones a trozos

Una función formada por la unión de dos o mas funciones, cada una de ellas definida en intervalos disyuntos, recibe el nombre de función segmentada o función a trozos.

Así, una función a trozos presenta diferentes expresiones algebraicas en determinados intervalos; en forma general, una función a trozos es de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) \text{ si } x \in I_1 \\ g_2(x) \text{ si } x \in I_2 \\ \dots \\ g_n(x) \text{ si } x \in I_n \end{cases}$$

donde $I_i \cap I_j = \varnothing$ si $i \neq j$

La grafica de g(x) está formada por todas las partes de g(x). El dominio y recorrido de g(x) es la unión de los dominios y los recorridos de cada una de las partes que la forman

Ejemplo: Determinar la gráfica, el dominio y el recorrido de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\, x \leq 1 \\ 1 - x & si\, x > 1 \end{cases}$

Primero, se identifican los intervalos en los que se define la función $f(x)$.

Para $x \leq 1$. Es decir, el intervalo $(-\infty, 1]$, se realiza la tabla de valores con $f(x) = x^2$, la cual corresponde a una parte de una parábola.

x	1	0	−1	−2
y	1	0	1	4

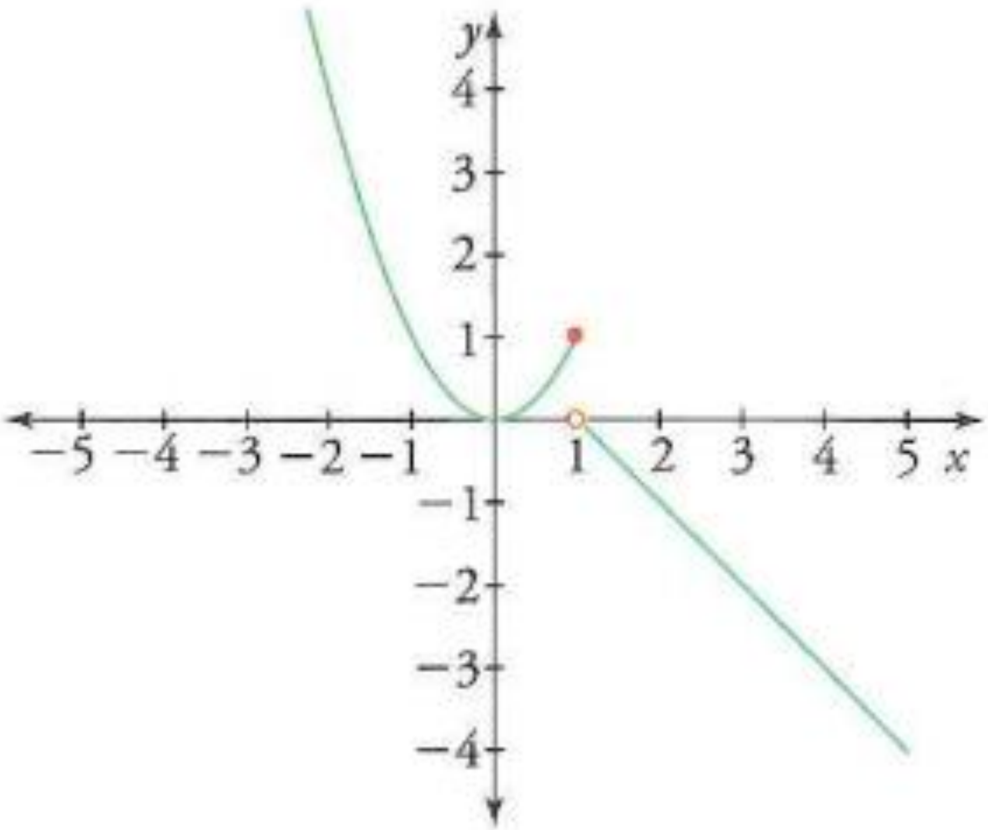
Para el intervalo $(1, \infty)$, se realiza la tabla de valores con $f(x) = 1 - x$, que corresponde a una línea recta.

x	1,5	2	3	4
y	−0,5	−1	−2	−3

Luego, se realiza la grafica de la función de acuerdo con las funciones que la componen.

Se debe tener en cuenta que el valor 1 del dominio se encuentra incluido en el primer intervalo.

Finalmente, la gráfica de la función es:



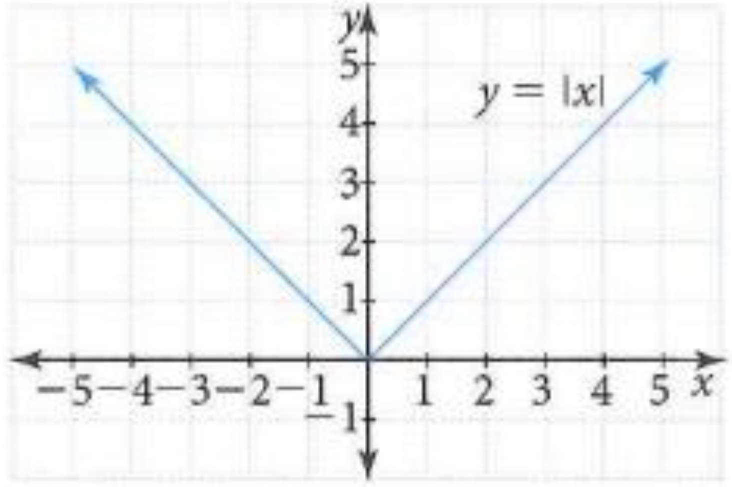
De acuerdo con la gráfica se puede concluir que:

Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$

Función valor absoluto

La función valor absoluto se puede considerar como una función definida a trozos. Esta función asigna a cada numero real del dominio su valor absoluto y esta definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } -x < 0 \end{cases}$$



El dominio de la función es el conjunto de los números reales

El recorrido de la función es el conjunto de los números reales no negativos

La gráfica de la función se muestra en la imagen

Realizar la gráfica de la función $f(x) = |x - 4| + 2x - 6$

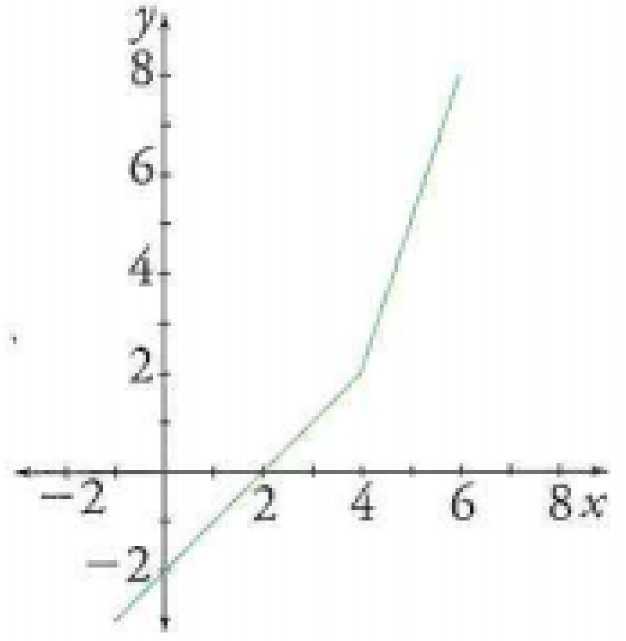
Utilizando la definición de valor absoluto determinamos la función:

$$f(x) = \begin{cases} (-x + 4) + 2x - 6 & si\ x < 4 \\ (x - 4) + 2x - 6 & six \geq 4 \end{cases}$$

Es decir

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & si & x < 4 \\ 3x - 10 & si & x \geq 4 \end{cases}$$

Luego al graficar cada parte tenemos que:



$$Domf = IR$$
$$Recf = IR$$

Función parte entera

La función que asigna a cada elemento del dominio mayor entero, menor o igual que él, recibe el nombre de función parte entera. Es decir

$$f(x) = \|x\| = n \text{ si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leqslant x < n + 1$$

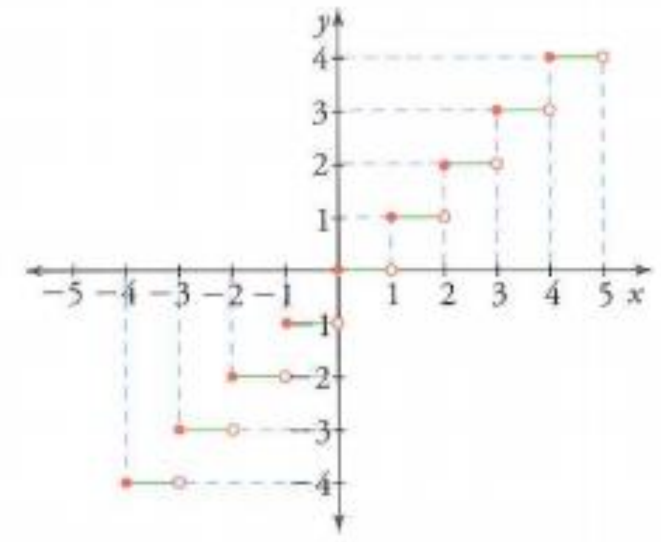
Esta función se define de los números reales a los números enteros, es decir, $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Rec\ f = \mathbb{Z}$

Algebraicamente, la función parte entera se define así:

$$f(x) = \|x\| = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leqslant x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \end{cases}$$

En forma similar para todos los números reales.

La grafica de la función parte entera es:

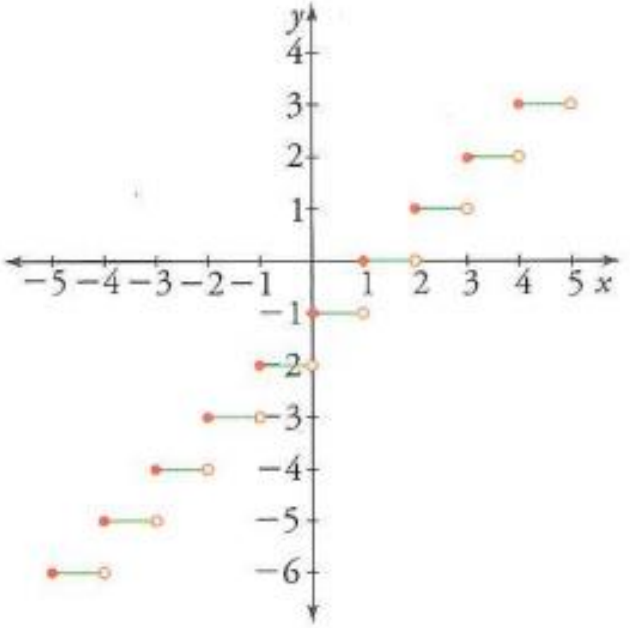


Realizar la gráfica de la función $f(x) = ||x - 1||$

Primero, se construye una tabla de valores y se analiza su comportamiento.

x	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
y	-4	-3	-2	-1	0	0

Luego, la gráfica de la función es:



Finalmente, en la gráfica se muestra que el dominio y el rango de la función h es:

$$\text{Dom } h = \mathbb{R} \text{ y Ran } h = \mathbb{Z}.$$

Actividad: [guia 8 funciones especiales.docx]

Operaciones entre funciones

Las funciones pueden combinarse por medio de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división para obtener nuevas funciones

Sean f y g funciones cuyos dominios son A y B respectivamente entonces se definen las siguientes funciones

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dom}\,(f+g) = A \cap B$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dom}\,(f-g) = A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{Dom}\,(f \cdot g) = A \cap B$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ y $\text{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = A \cap B$

Ejemplo

1. Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ y $g(x) = -5x^2 + x$, hallar:

a. $(f + g)(-2)$

Como $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -15$ y $g(-2) = -5(-2)^2 + (-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-15) + (-22) = -37$

b. $(f - g)(-2)$

Como $f(-2) = -15$ y $g(-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f - g)(-2) = f(-2) - g(-2) = (-15) - (-22) = 7$

c. $(f \cdot g)(-2)$

Como $f(-2) = -15$ y $g(-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2) = (-15) \cdot (-22) = 330$

Composición de funciones

Existe otra forma de combinar funciones para obtener una nueva función

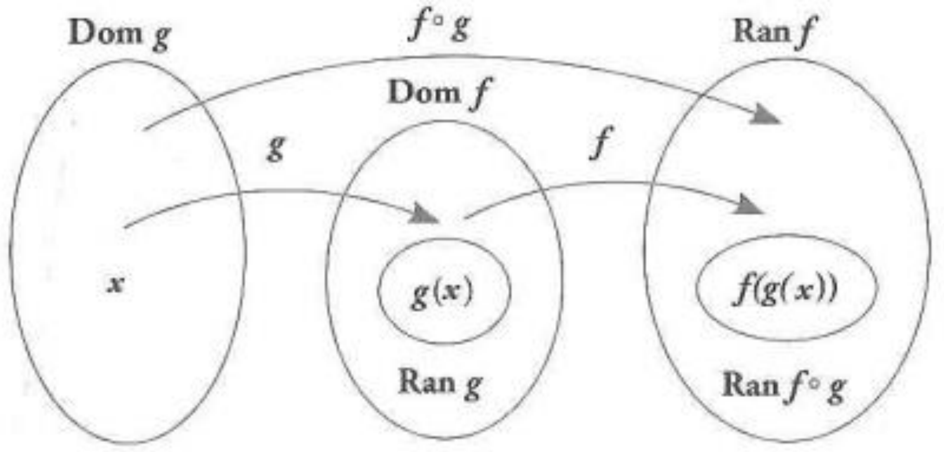
Si f y g son dos funciones, se define una nueva función fog , que se lee f compuesto con g como:

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Donde el dominio es el conjunto de los números reales x del dominio de g tales que g(x) esta en el dominio de f

En general dada dos funciones arbitrarias $g \; y \; f$, si se toma un numero x en el dominio de g, se obtiene su imagen $g(x)$. Si este numero $g(x)$ pertenece al dominio de f, entonces se puede calcular $f(g(x))$

Representación en diagrama de Venn de la composición de funciones



Ejemplo: Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $\quad g(x) = x^2 - 1$. Hallar $fog(x)$

Según la definición de composición $fog(x) = f\big(g(x)\big)$

$$f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Para encontrar el dominio de fog se resuelve $x^2 - 1 \geq 0$ pues toda raiz de índice para debe tener radicando mayor o igual a cero

Finalmente resolviendo tenemos que

$$Dom(fog) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$Rec(fog) = [0, \infty)$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$, determinar la función $g(x)$ tal que $(fog)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

$$(fog)(x) = 4x^2 - 12x + 9$$
$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$$
$$[g(x)]^2 = 4x^2 - 12x + 9$$
$$[g(x)]^2 = (2x-3)^2$$
$$g(x) = \pm(2x-3)$$

Explica con tus palabras cada paso para resolver el ejercicio planteado

Finalmente $g(x) = -2x + 3)$ o bien $g(x) = 2x - 3$

Actividad:[guia 9 operatoria con funciones.docx]

Función inversa

$Si\ f: A \to B\ es\ una\ funcion\ biyectiva, existe\ f^{-1}: B \to A\ y\ se\ define\ como$:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \forall y \in B$$

La inversa de una función cumple con las siguientes propiedades

$f^{-1} es\ una\ función\ biyectiva$

$Domf^{-1} = Recf \quad y \quad Recf^{-1} = Domf$

La grafica de f^{-1} es la reflexión de la grafica de f con respecto a la recta $y = x$

Para hallar la inversa de una función se utiliza el siguiente procedimiento

1. Se escribe $y = f(x)$
2. Se verifica que la función es biyectiva
3. Se despeja x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y, para obtener una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$
4. Se intercambia y por x en la nueva función. Así se obtiene $f^{-1}(\mathrm{x})$
5. Se verifica que: $(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = I(x)$ donde $I(x)$ es la función identidad

Hallar la inversa de la función $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$. Luego, trazar la grafica de $f(x) y\ f^{-1}(x)$

1. La función ya esta escrita de la forma y=f(x)

2. Se verifica que sea biyectiva (toda función lineal es biyectiva)

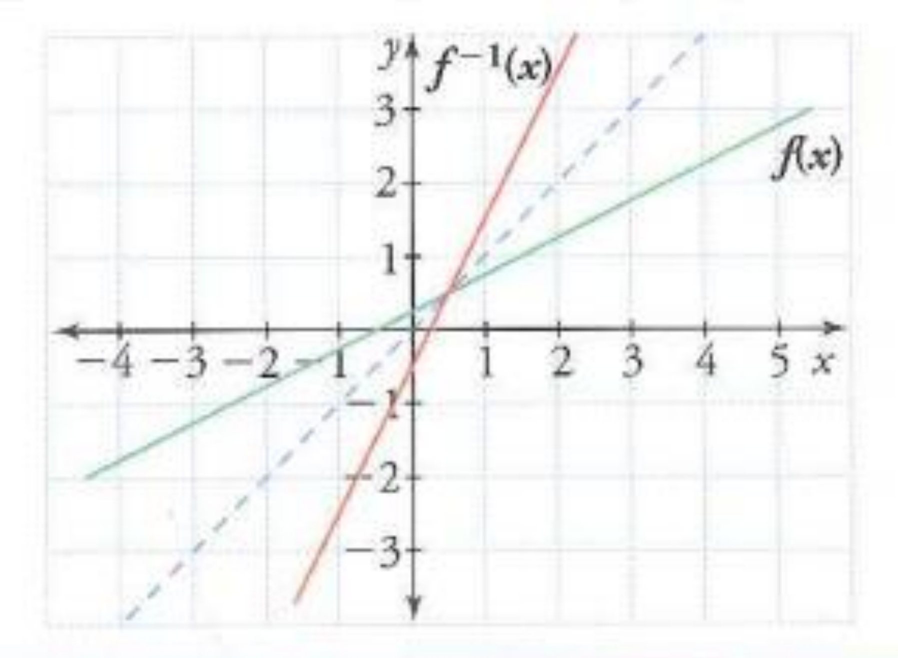
3.

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$$
$$y = \frac{5x + 2}{10}$$
$$10y = 5x + 2$$
$$10y - 2 = 5x$$
$$\frac{10y - 2}{5} = x$$
$$2y - \frac{2}{5} = x$$

4. Se intercambia x por y. Luego:

$$y = f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$$

Gráfica de la función y su inversa



Actividad guia 10 funciones inversas.docx